

Beste docent/leraar,

Hopelijk heeft de workshop inspiratie opgeleverd, en heeft het op zijn minst “wiskundig plezier” opgeleverd.

Als u hierdoor zoveel inspiratie heeft gekregen dat u graag wat van de onderwerpen in een les wilt behandelen, dan is deze lesbrief en de bijbehorende slides een handig hulpmiddel. Merk op dat de “slides” hier in de lesbrief een klein beetje anders zijn dan de daadwerkelijke slides (voornamelijk door de “landscape” orientatie).

Deze lesbrief bevat twee lessen (“Oneindig” en “de Calk-Wilfin boom”), die onafhankelijk van elkaar kunnen worden ingezet. Waarschijnlijk zijn ze het meest geschikt voor een les van wiskunde D, maar ze kunnen ook (deels) gebruikt worden voor andere lessen of zelfs onderbouw. U bent de beste beoordelaar hiervan!

Veel lesgeefplezier gewenst!

Stefan Maubach
Vaksteunpunt Wiskunde

Lesbrief “Oneindigheid”

(Zie bijbehorende slides, “Slides-LB1”)

Heb een gesprek met leerlingen hoe je bepaalt welke verzameling groter is. Waarschijnlijk zeggen leerlingen dingen als “je telt het en je vergelijkt de getallen” hetgeen heel goed is voor eindige verzamelingen. Benoem daarna voorbeelden als $\mathbb{N}$ of $\mathbb{Z}$ of $\mathbb{R}$, en vraag hoe groot deze zijn. “oneindig groot” zal het antwoord zijn. En dan vragen welke groter is en welke kleiner. Waarschijnlijk komen er dingen als $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$.

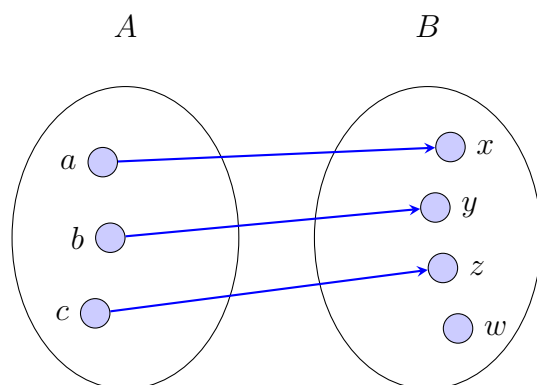
Perfect, het is nog niet het moment om te gaan praten over “ $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ zijn evengroot, $\mathbb{R}$ is daadwerkelijk groter”, het is tijd om te praten over het *inbedden* van een verzameling.

Ik laat het aan u over of u de begrippen “injectief” en “surjectief” wilt introduceren of slechts over pijltjes wilt blijven praten.

Je kunt het eerste plaatje van de volgende pagina laten zien (een injectieve afbeelding) en hiermee uitleggen dat als je zo’n soort afbeelding hebt, waar elk pijltje op iets anders uitkomt, dan is A kleinergelijk aan B qua grootte.

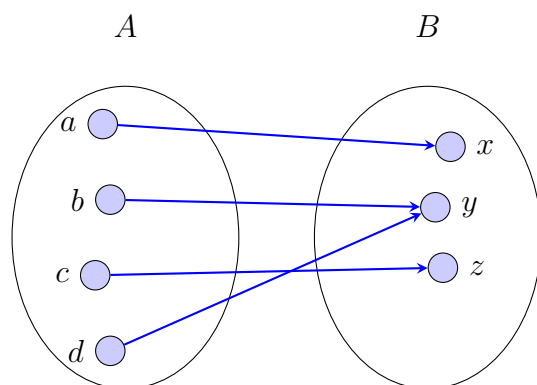
Neem de tijd om te zien of iedereen het eens is met de definitie dat $\|A\| \leq \|B\|$ in dit geval. Als iemand het er niet mee eens is, dat kan! Je kunt echter wel duidelijk maken dat in het geval van eindige verzamelingen, dit klopt.

Ga daarna verder met het volgende plaatje (een surjectieve afbeelding). Discussieer of dit een goede definitie is van het begrip “ $\|A\| \geq \|B\|$ ”.



Elk pijltje komt op iets anders uit

$$\|A\| \leq \|B\|$$



Elk element in B heeft een pijltje dat er arriveert.

$$\|A\| \geq \|B\|$$

Als leerlingen dit allemaal eenvoudig vinden (en zich misschien afvragen met wat voor een babywiskunde je nou weer bezig bent) dan is het tijd voor een van de volgende vragen:

VRAAG 1: “ Betekent $\|A\| \leq \|B\|$ hetzelfde als $\|B\| \geq \|A\|$?”

(De slides geven een bewijs voor $\|A\| \leq \|B\| \Rightarrow \|B\| \geq \|A\|$, u kunt eventueel zelf nog een bewijs geven van $\|A\| \leq \|B\| \Leftarrow \|B\| \geq \|A\|$. Dat kan door dezelfde plaatjes te gebruiken: als je begint met de rode pijltjes maak je de blauwe pijltjes door één van de rode pijltjes te volgen die bij dat element aankomen.)

VRAAG 2: “Ik maak de afbeelding $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ door

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1, f(-1) = 2,$$

$$f(2) = 3, f(-2) = 4,$$

$$f(3) = 5, f(-3) = 6,$$

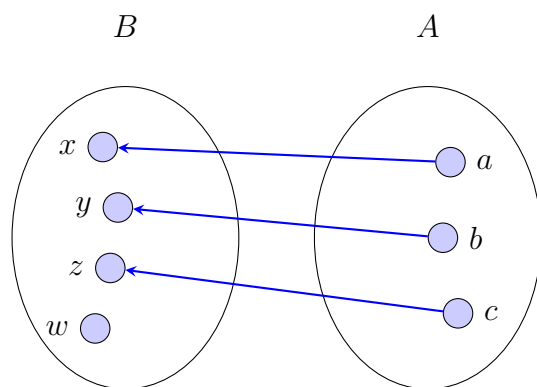
$$f(4) = 7, f(-4) = 8,$$

...

oftewel $f(n) = 2n - 1$ als $n > 0$ en $f(n) = -2n$ als $n \leq 0$.

Zegt dit niet dat $\|\mathbb{Z}\| \leq \|\mathbb{N}\|$?

De volgende pagina heeft twee plaatjes die erbij gebruikt kunnen worden

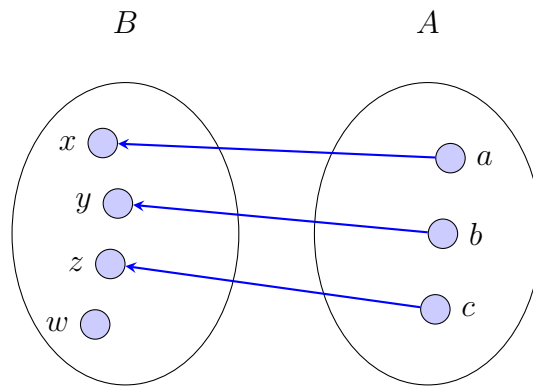


Elk pijltje komt op iets anders uit

$$\|A\| \leq \|B\|$$

Kun je hieruit afleiden dat

$$\|B\| \geq \|A\| \text{ ?}$$



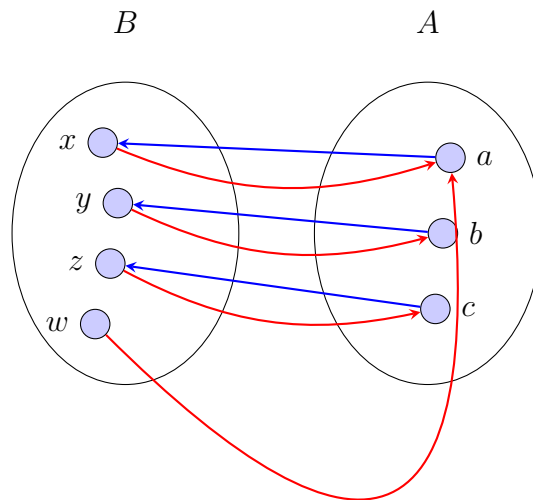
Elk pijltje komt op iets anders uit

$$\|A\| \leq \|B\|$$

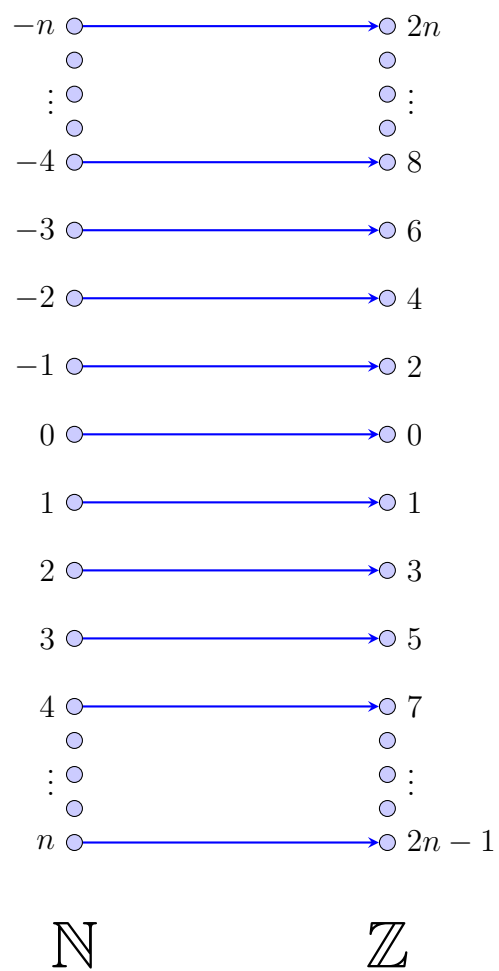
Kun je hieruit afleiden dat

$$\|B\| \geq \|A\| \text{ ?}$$

Ja, dat kan:



Ik draai de pijltjes om, en waar geen pijltje vertrekt doe ik maar wat - ik laat het pijltje eender waar aankomen.



Er zijn drie onderwerpen die hierna aangestipt kunnen worden in deze volgorde:

- Hilbert's hotel
- De stelling van Schröder-Bernstein (die niet-triviaal is! Het bewijs staat in het dictaat.)
- Overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$

Voor de eerste raden we een filmpje aan:

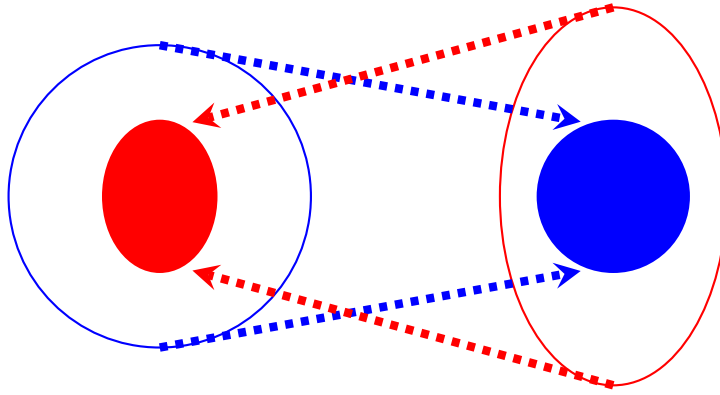
YouTube Video 1

of

YouTube Video 2

(Je kunt natuurlijk ook zelf uitleg hierover geven!)

Voor de andere twee hebben we de volgende twee slides.



De blauwe verzameling A wordt met unieke pijlen afgebeeld in de rode verzameling B . (Oftewel $\|A\| \leq \|B\|$.)

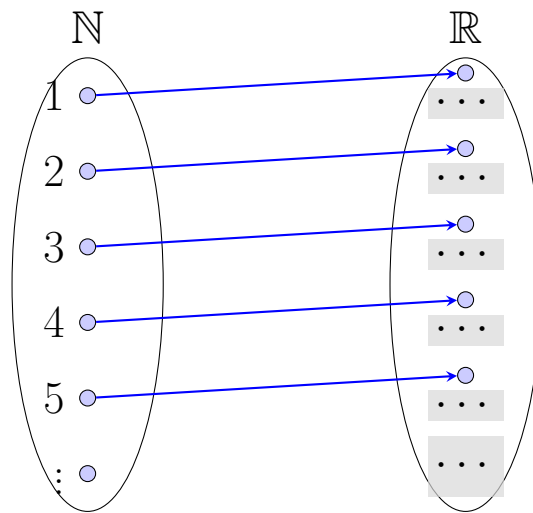
De rode verzameling B wordt met unieke pijlen afgebeeld in de blauwe verzameling A . (Oftewel $\|B\| \leq \|A\|$.)

Stelling van Schröder-Bernstein:

Als $\|A\| \leq \|B\|$,

en $\|B\| \leq \|A\|$,

dan hebben A en B evenveel elementen.



Elke afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$ mist (een heleboel) elementen: $\mathbb{R}$ is daadwerkelijk groter.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en zelfs $\mathbb{Q}$ zijn allemaal even groot!

Deze heten *aftelbaar*.

Bestaat er een verzameling A zodat

$$\|\mathbb{N}\| < \|A\| < \|\mathbb{R}\| ?$$

Het antwoord: Het is *bewezen* dat je niet kunt bewijzen dat A bestaat, noch dat je kunt bewijzen dat A niet bestaat!

Als je een afbeelding $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ maakt, dan mis je altijd iets:

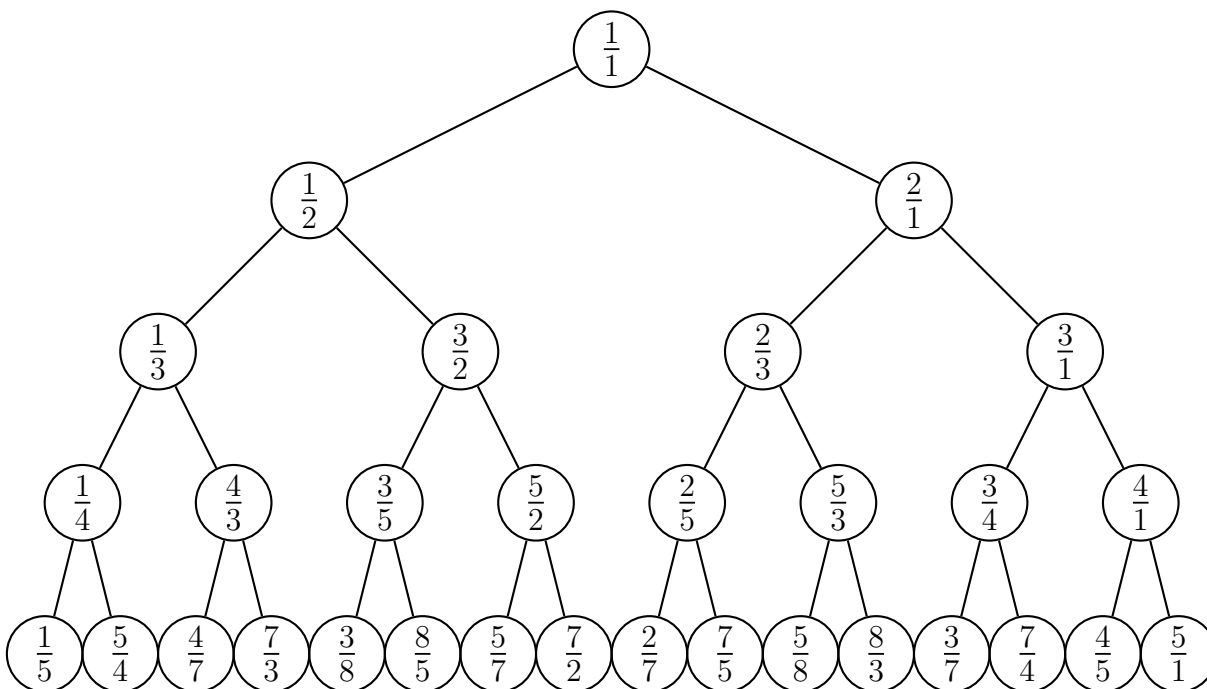
n	$f(n)$
0	0.①54873 ...
1	0.7②3985 ...
2	0.62①746 ...
3	0.835③91 ...
4	0.9017⑦3 ...
$\vdots$	$\vdots$
x	0,21211 ...

Lesbrief “De Calkin-Wilf boom”

In deze les kun je de Calkin-Wilf boom gebruiken om te spelen met breuken. Onderweg kun je ook het algoritme van Euclides introduceren.

Begin met de volgende slide, en vraag leerlingen om een patroon erin te ontdekken en de boom uit te breiden.

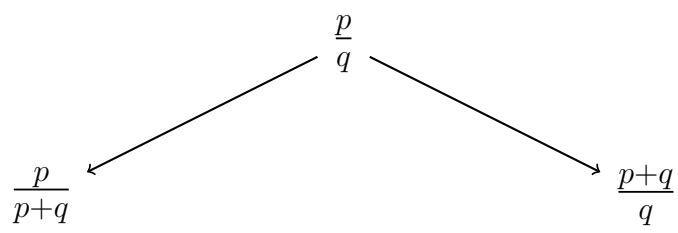
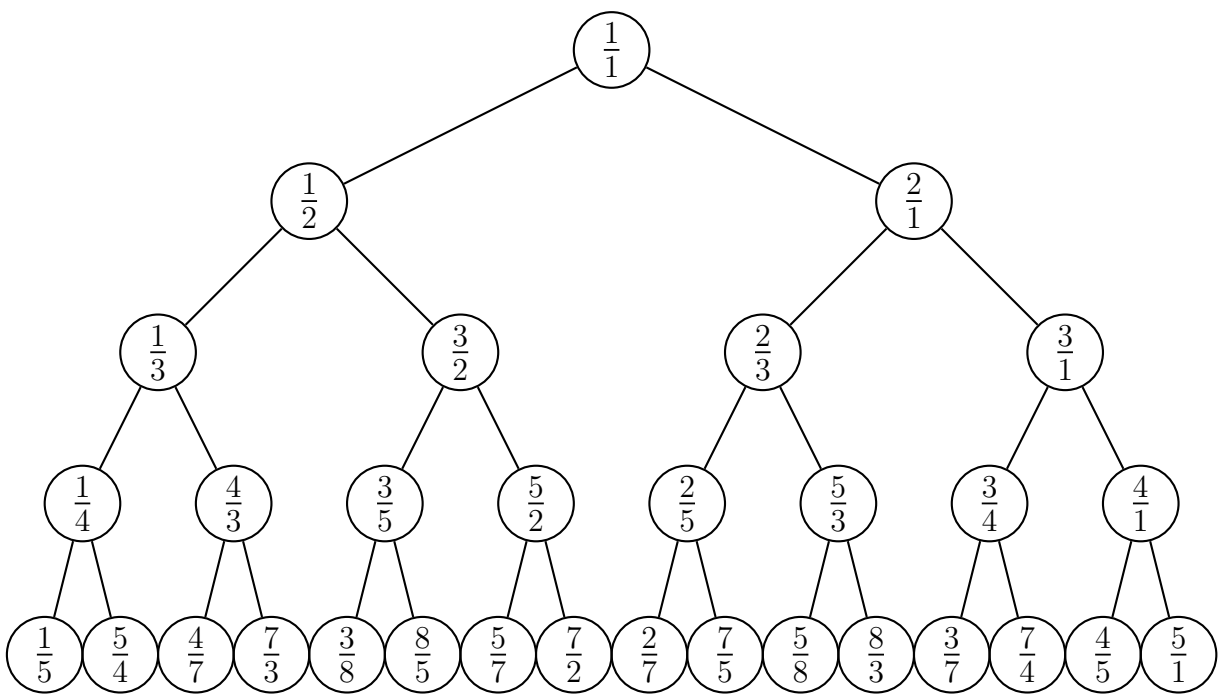
de Calkin-Wilf boom:

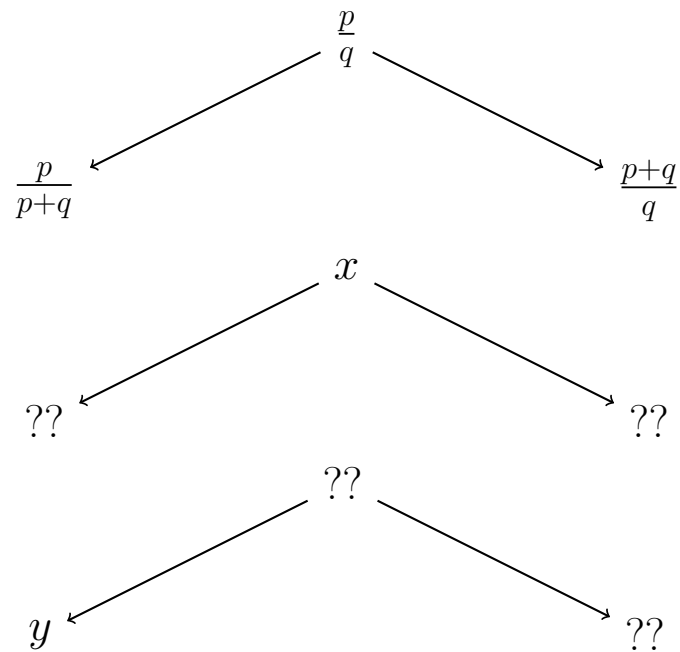


•

•

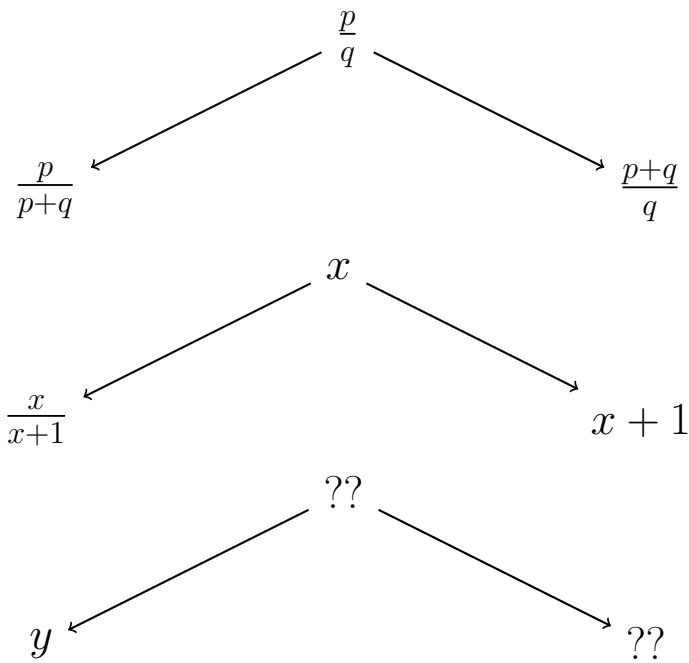
•





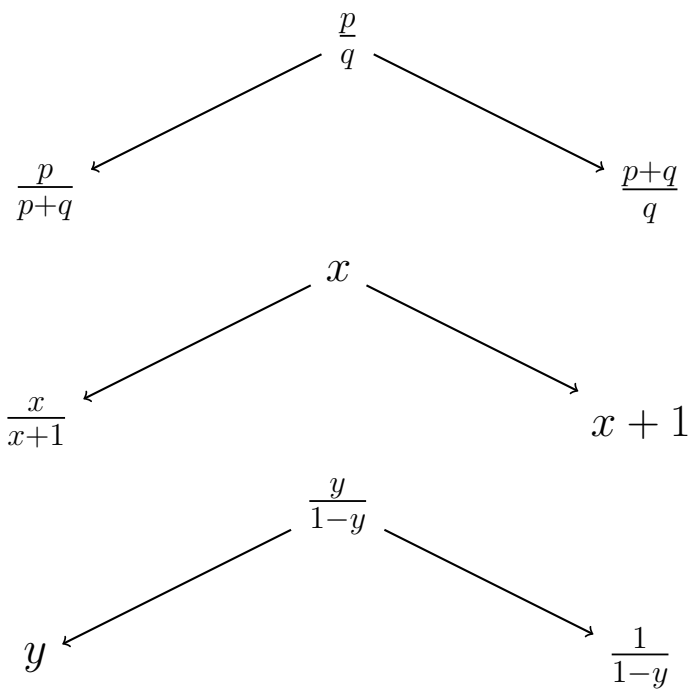
Gegeven dat in de boom een x staat, kun je het “linkerkind” en het “rechterkind” uitdrukken in x ?

Gegeven dat in de boom een y links staat, kun je de “ouder” van y en de “rechterbroer” van y uitdrukken in y ?



Gegeven dat in de boom een x staat, kun je het “linkerkind” en het “rechterkind” uitdrukken in x ?

Gegeven dat in de boom een y links staat, kun je de “ouder” van y en de “rechterbroer” van y uitdrukken in y ?

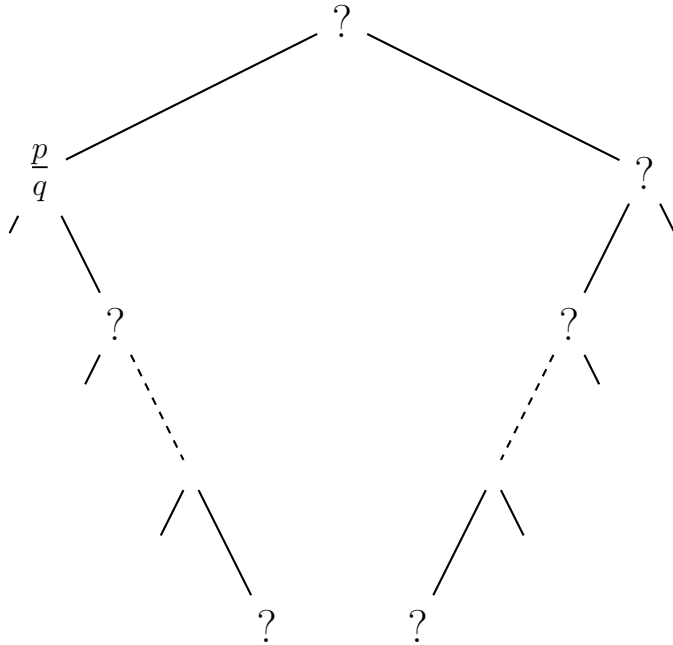


Gegeven dat in de boom een x staat, kun je het “linkerkind” en het “rechterkind” uitdrukken in x ?

Gegeven dat in de boom een y links staat, kun je de “ouder” van y en de “rechterbroer” van y uitdrukken in y ?

Gegeven is dit deel van de boom: vanuit de top is er een stap naar links, en n stappen naar rechts gedaan. Aan de andere kant is er een stap naar rechts, en n stappen naar links gedaan.

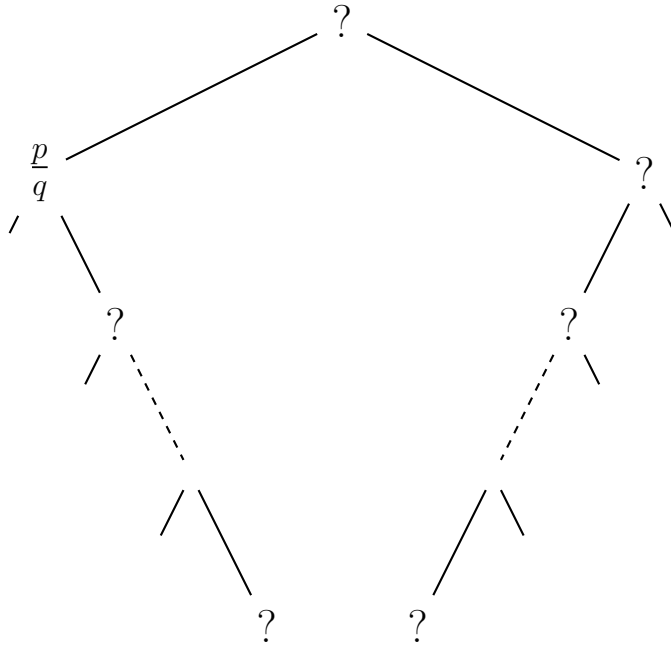
a) Vul de waarden in op de vraagtekens.



b) Kun je iets zeggen over $\left[\frac{p}{q}\right]$ in dit diagram?

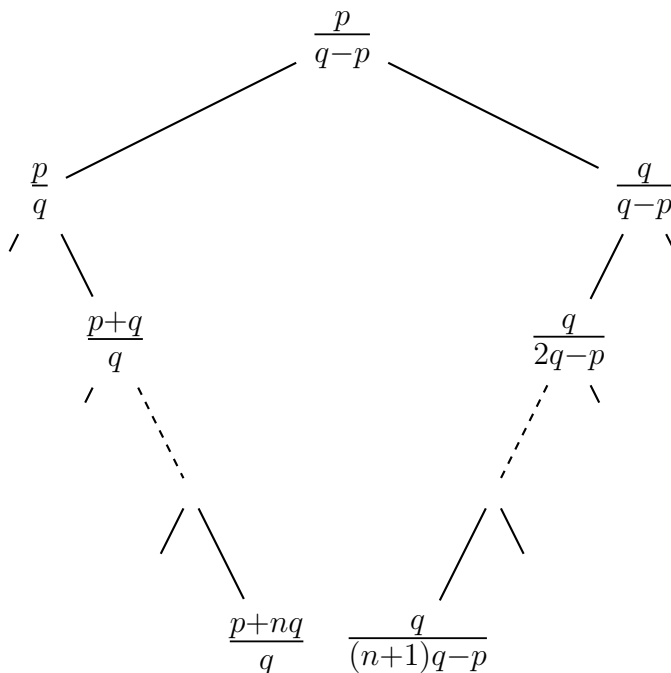
Gegeven is dit deel van de boom: vanuit de top is er een stap naar links, en n stappen naar rechts gedaan. Aan de andere kant is er een stap naar rechts, en n stappen naar links gedaan.

a) Vul de waarden in op de vraagtekens.



b) Kun je iets zeggen over $\left[\frac{p}{q}\right]$ in dit diagram?

Uitwerking: a)

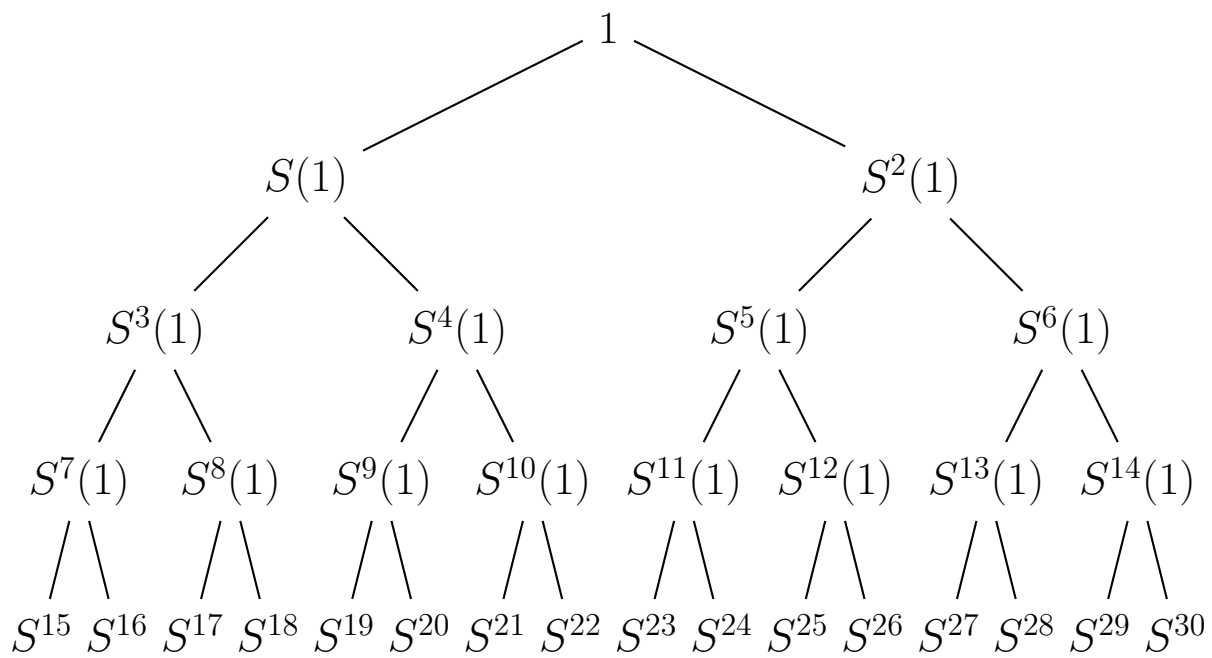


b) De linkerknoop is altijd een waarde < 1 , dus $\left[\frac{p}{q}\right] = 0$.

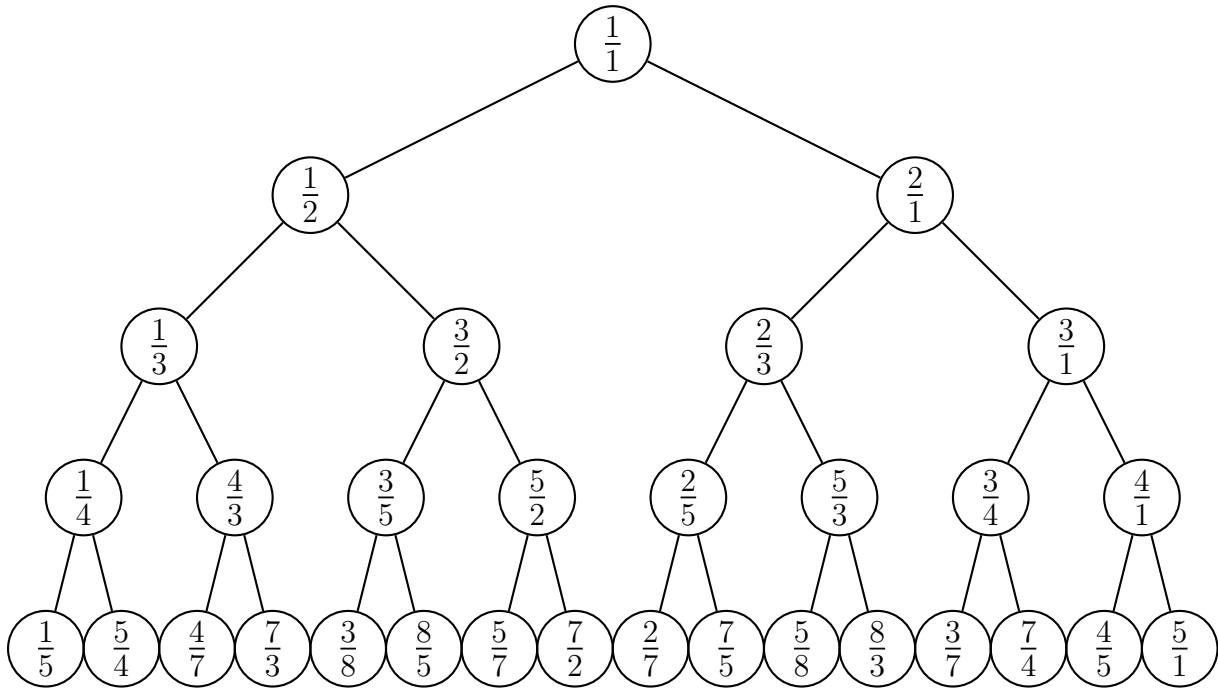
Nu definieer

$$S(x) = \frac{1}{2[x] - x + 1}$$

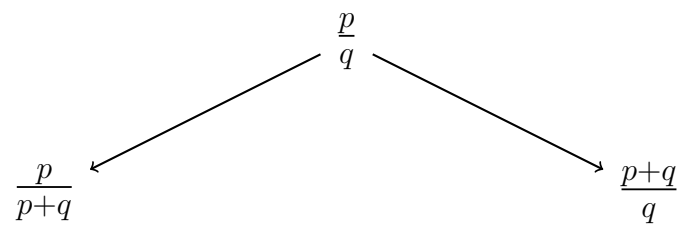
Bereken eens $S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots$ etcetera - op de uitkomst die je krijgt pas je S steeds toe.



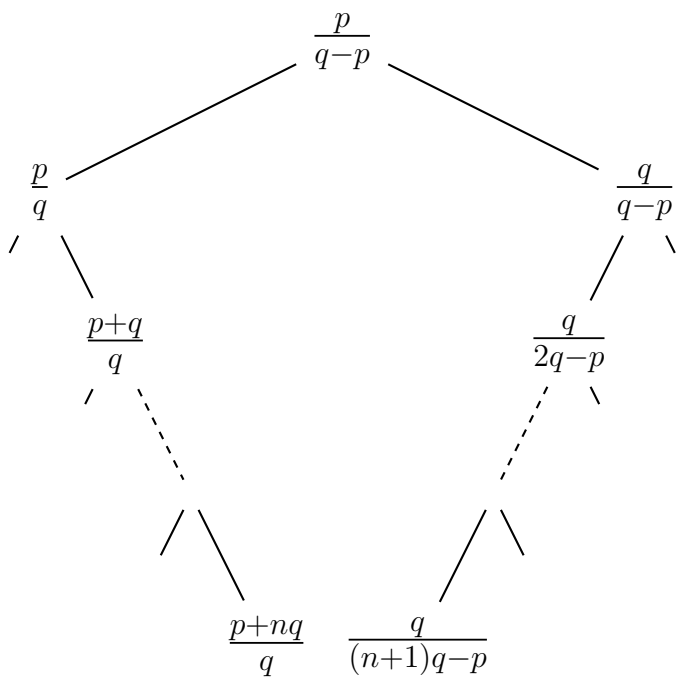
HOE KAN DAT NOU ???



$$S\left(\frac{n}{1}\right) = \frac{1}{2[n] - n + 1} = \frac{1}{n + 1}.$$



$$\begin{aligned}
 S\left(\frac{p}{p+q}\right) &= \frac{1}{2\left[\frac{p}{p+q}\right] - \frac{p}{p+q} + 1} = \frac{1}{2 \cdot 0 - \frac{p}{p+q} + 1} = \frac{1}{-\frac{p}{p+q} + \frac{p+q}{p+q}} \\
 &= \frac{1}{\frac{q}{p+q}} = \frac{p+q}{q}.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 S\left(\frac{p+nq}{q}\right) &= \frac{1}{2\left[\frac{p+nq}{q}\right] - \frac{p+nq}{q} + 1} = \frac{1}{2n - \frac{p+nq}{q} + 1} \\
 &= \frac{q}{2nq - (p+nq) + q} = \frac{q}{(n+1)q - p}.
 \end{aligned}$$