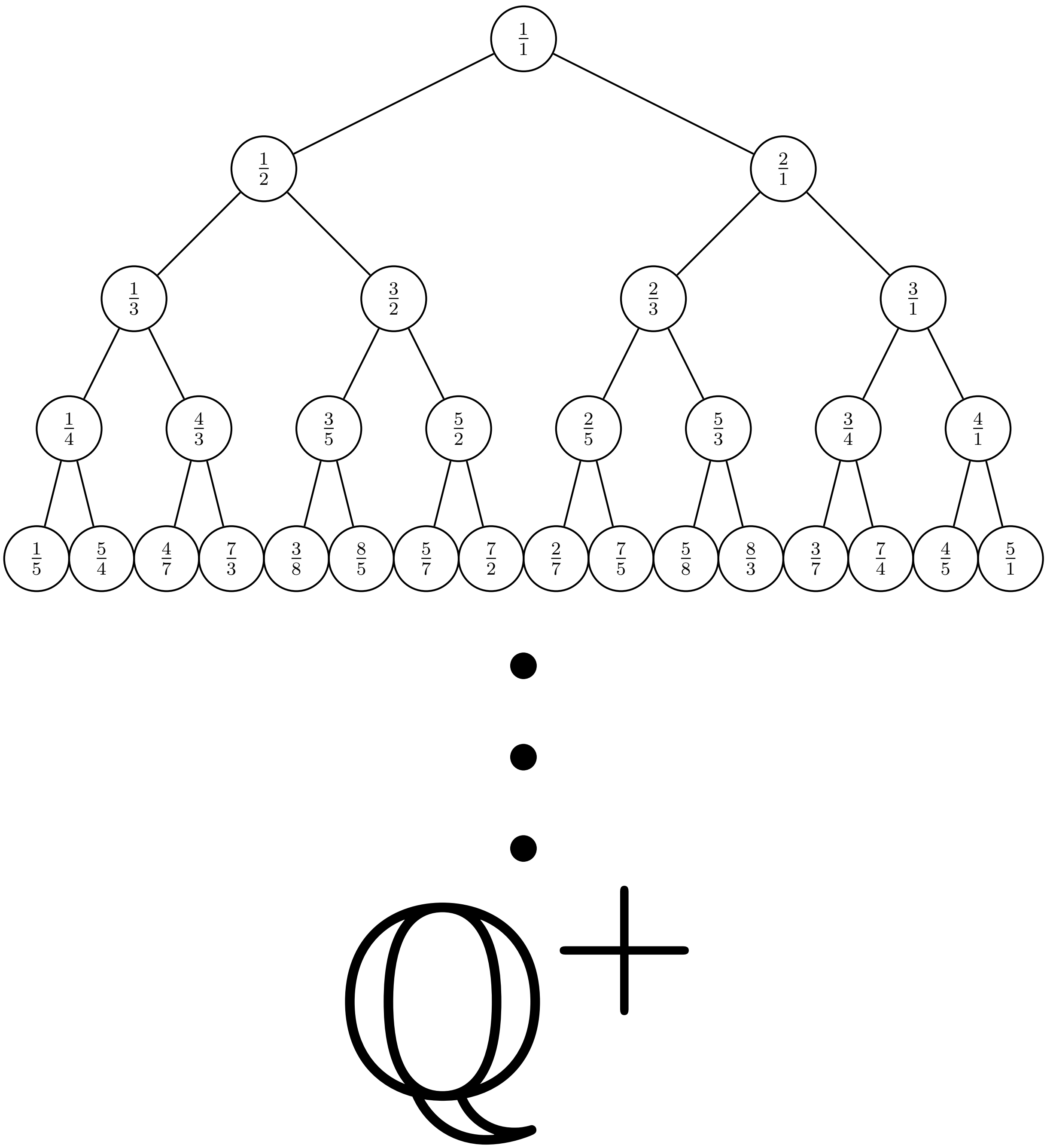
Tussen Eindig en Overaftelbaar

Stefan Maubach



Voorwoord

Dit manuscript is geschreven voor een publiek van middelbare school docenten wiskunde. Er is gepoogd dit interessant te maken voor zowel tweedegraads als eerstegraads docenten: van de geinteresseerde tweedegrader die via het HBO is gekomen tot de gepromoveerde bovenbouwdocent. Dit is natuurlijk een onmogelijke spagaat, maar voor beide groepen zullen er interessante dingen in dit manuscript staan. Vergeef mij dus ook als sommige dingen te elementair lijken misschien - ik wil graag dat een docent alles kan vinden in dit manuscript.
Het doel van dit manuscript en de bijbehorende bijeenkomst is om middelbare school docenten wat vakinhoudelijke verdieping/herhaling/motivatie/uitdaging te geven. En natuurlijk voor het delen van het enthusiasme voor mooie wiskunde, zodat ze met hernieuwd enthusiasme naar hun klas terug gaan, en wie weet dit enthusiasme uitstralen naar hun leerlingen. Ik hoop dat de lezers van het manuscript en deelnemers van de bijeenkomst inderdaad momenten van *wiskunde-euforie* beleven (een nieuw woord dat betekent “de extase die men beleeft bij het ondervinden van schoonheid in de wiskunde”.)
Het kerndeel van dit manuscript (sectie 3) is gebaseerd op de bron [**?**]. De andere onderdelen (b.v. Schröder-Bernstein) zijn standaardliteratuur die in vele bronnen te vinden is.
Het is de ambitie meer van dit soort onderwerpen in soortgelijke bijeenkomsten op te zetten, mits deze een succes is.

Een kort dankwoord aan prof. Don Zagier voor een interessante discussie over deze opzet, en aan Monique Scheepens voor de organisationele uitvoering. Verder dank aan ASML die indirect een deel hiervan heeft gesponsord, alsmede natuurlijk de Universiteit Maastricht.

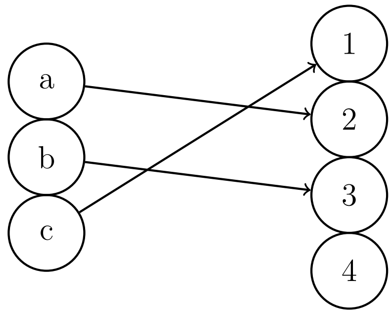
Stefan Maubach

Contents

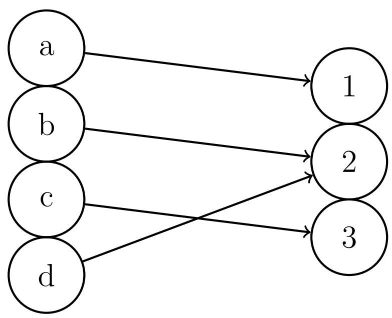
1 Hoe zat dat ook alweer:

1.1 verzamelingen en hun grootte

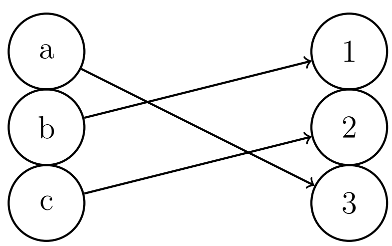
Als S, T verzamelingen zijn, dan is $f : S \longrightarrow T$ **injectief** als $s_1 \neq s_2$ impliceert dat $f(s_1) \neq f(s_2)$ (verschillende dingen gaan naar verschillende dingen). Of visueel: er komt *hoogstens* één pijl aan:



f is **surjectief** als elke $t \in T$ een origineel heeft, d.w.z. er bestaat een $s \in S$ met $f(s) = t$. (Elk element wordt bereikt, of, zoals een Amerikaanse president ooit zei: “No ~~child~~ t is left behind”) Of visueel: er komt *minimaal* één pijl aan:



Als f zowel surjectief als injectief is, dan is f **bijectief** en noemen we f een **bijectie**. Of visueel: er komt *precies* één pijl aan:



Als je twee verzamelingen hebt, dan wil je kunnen praten over hoe groot zo'n verzameling is - je wilt ze kunnen vergelijken. Voor eindige verzamelingen is dat niet zo moeilijk, maar je wilt oneindig grote verzamelingen ook kunnen vergelijken. Je zou erover kunnen discussieren, maar de volgende definities lijken goede definities en dat zijn ook precies de manieren hoe in de wiskunde wordt gekeken naar hoe je de grootte van verzamelingen kunt vergelijken (zou jij een andere manier kunnen verzinnen?!?):

Definitie 1.1. We noteren de grootte van een verzameling S als $|S|$. Als $f : S \longrightarrow T$ een bijectie is, dan definieer $|S| = |T|$.

(Merk op dat het gebruik van " $=$" okee is want $|S| = |T|$ impliceert $|T| = |S|$ - ja je moet bizar precies zijn met dit soort gekkigheden.)
Dat lijkt precies te zijn wat je wilt, je linkt elk object uit S aan een object in T, nouja, wat wil je dan? Dan zijn ze even groot.
Soortgelijk, zou je ook zoiets kunnen zeggen als $f : S \longrightarrow T$ alleen maar injectief of alleen maar surjectief is. Als f injectief is, dan prop je S "in" T, maar misschien bereik je niet alles.

Definitie 1.2. Als $f : S \longrightarrow T$ injectief is, dan definieer $|S| \leq |T|$.

Als f surjectief is, dan "leg je S over T heen" maar misschien ligt het op sommige plekken dubbel:

Definitie 1.3. Als $f : S \longrightarrow T$ surjectief is, dan definieer $|S| \geq |T|$.

Nou klinkt dat allemaal logisch, maar er zijn een aantal vragen die je hier kunt stellen, waar je misschien in eerste instantie niet eens van door hebt dat het überhaupt een vraag is:

Stelling 1.4.

1. *Als* $|S| = |T|, |T| = |U|$, *dan* $|S| = |U|$.
2. *Als* $|S| \leq |T|$, *dan* $|T| \geq |S|$.
3. *Als* $|S| \geq |T|$, *dan* $|T| \leq |S|$.

Bewijs:

1. Als er een bijectie $f : S \longrightarrow T$ en een bijectie $g : T \longrightarrow U$ is, dan is $g \circ f : S \longrightarrow U$ een bijectie.
2. Als $f : S \longrightarrow T$ injectief is, dan definieer $g : T \longrightarrow S$ als:

   - Als er een origineel $s \in S$ (die s is dan uniek!) is voor een t, dan definieer $g(t) = s$.
   - Als er geen origineel is voor t - dan doe maar wat, stuur t naar eender welke $s \in S$: $g(t) = s$.

   Dan is g surjectief want elke s heeft een origineel $f(s)$, en misschien wel meer.
3. Als $f : S \longrightarrow T$ surjectief is, dan definieer $g : T \longrightarrow S$ als : kies een van de originelen s van een t, en definieer $g(t) = s$.

□

Er is nog 1 ding dat we moeten doen, maar die is lastiger, én een Bekende Stelling met een Naam:

Stelling van Schröder-Bernstein. " $|S| \leq |T|$ en $|T| \leq |S|$" $\Longleftrightarrow$ "$|S| = |T|$".

Het bewijs van deze stelling laten we even zitten.

Voor nu: we mogen dit allemaal gebruiken in het volgende!
We voeren ook in: $|S| < |T|$ betekent $|S| \leq |T|$ en $|S| \neq |T|$, en op een soortgelijke manier $|S| > |T|$.

1.2 Aftelbaar/overaftelbaar

Je herinnert je vast wel dat $\mathbb{R}$ significant groter is dan $\mathbb{N}$ (dat er dus geen bijectie $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ bestaat). Voor de volledigheid herhalen we dat bewijs hier - het diagonaalargument van Cantor:
Stelling 1.5. *Er bestaat geen bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Met andere woorden: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.*

Bewijs: Stel dat er een bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bestaat. Zet dan de uitkomsten van f onder elkaar:

n	$f(n)$
0	$0.154873\ldots$
1	$0.723985\ldots$
2	$0.621746\ldots$
3	$0.835391\ldots$
4	$0.901773\ldots$
$\vdots$	$\vdots$
x	$0,21211\ldots$

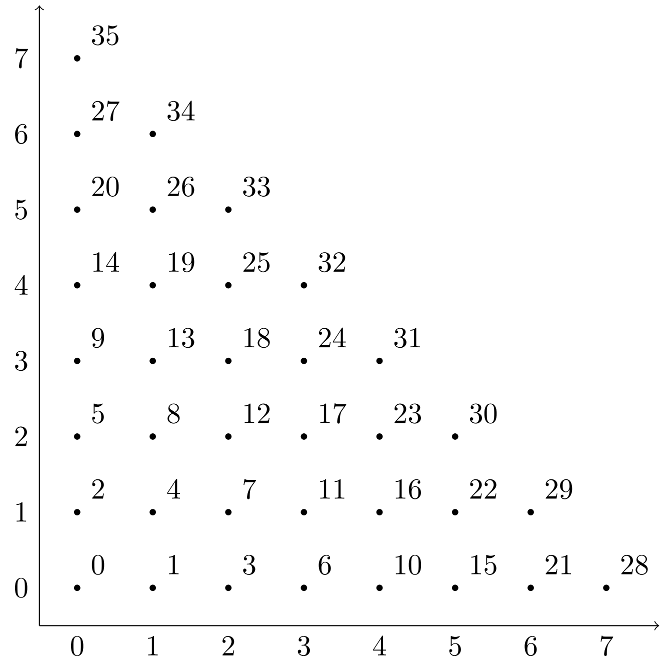
Je ziet dat er steeds een cijfer in de decimaalontwikkeling is omcirkeld — dit is het n-de cijfer van $f(n)$. We construeren nu een nieuw reëel getal door op de $n+1$-de plek na de komma een ander cijfer te zetten: we kiezen bijvoorbeeld 1, behalve als er al een 1 staat — dan kiezen we 2.
Het resulterende getal verschilt dus van elke $f(n)$ in minstens één decimaal. Dit getal zit dus niet in het bereik van f, wat in tegenspraak is met de aanname dat f een bijectie is.
Dus zo'n bijectie kan niet bestaan. $\square$

We noemen alles dat even groot is als $|\mathbb{N}|$ *aftelbaar*, en alles dat groter is *overaftelbaar*. In dit manuscript zullen we ons vooral focussen op aftelbare verzamelingen.

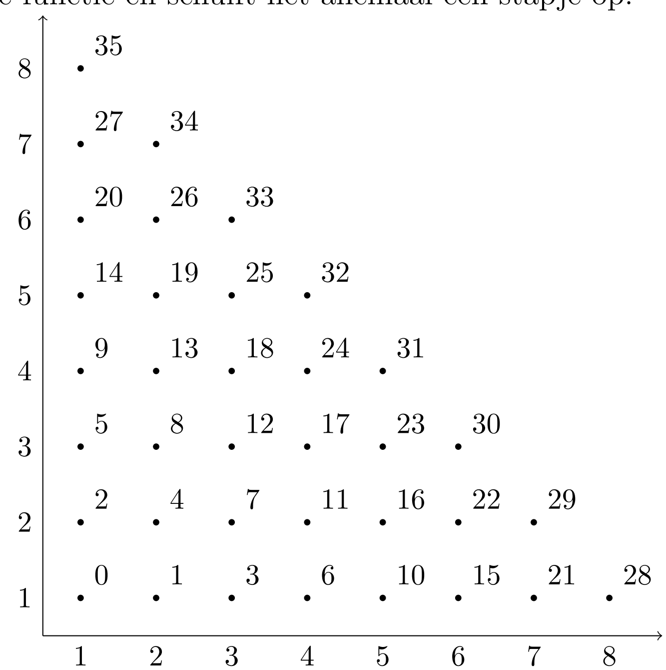
Opgave 1.6. Voor de volgende verzamelingen, geef een bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow$ (verzameling). Als dat niet lukt, bewijs dat $|(\text{verzameling})| = |\mathbb{N}|$.
a) $2\mathbb{N}$ (de verzameling even getallen)
b) $\mathbb{Z}$
c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
d) $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
e) $\mathbb{Q}^+$ (de getallen in $\mathbb{Q}$ die > 0 zijn)
e) Gegeven een bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, construeer een bijectie $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$.
Uitwerking:
a) $f(n) = 2n$ is een bijectie (we laten het bewijs over aan de lezer).
b)

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Hier is $[x]$ de "afronden-naar-beneden" functie, dus $[3.4] = 3, [\frac{22}{3}] = 7, [5] = 5$ etc.
c) Dit is nog niet zo makkelijk om een functie te vinden in formulevorm. Je kunt er eentje construeren door een rooster van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ te maken en vanaf de linkerbenedenhoek te tellen:



d) Je neemt de vorige functie en schuift het allemaal een stapje op:



e) Nou wordt het interessant - je hebt dus al een bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Nou is het mogelijk om met wat gepiel een bijectie $g : \mathbb{N} \longrightarrow Q^+$ te beschrijven (die zal dan niet in formulevorm zijn), maar het makkelijkst om te bewijzen dat $\mathbb{Q}^+$ aftelbaar is, is door de volgende afbeelding te maken: $h : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ waar $h(a, b) = \frac{a}{b}$. Deze afbeelding is geen bijectie, maar hij is echt wel *surjectief*. Dit betekent dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*| \geq |\mathbb{Q}^+|$. Verder is het gemakkelijk om een injectieve afbeelding $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ te maken (bijvoorbeeld $f(n) = n + 1$). Dus $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}^+|$.
Nu zegt de stelling van Schröder-Bernstein dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$.

f) Definieer

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ (-1)^n f([\frac{n-1}{2}]) & \text{ãls } n > 0 \end{cases}$$

Welnu- het is dus wat gepruts geweest, en nu weten we vanwege theoretisch geneuzel dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$. Maar we zijn ver van het hebben van een daadwerkelijke bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, en ik vermoed dat je zoiets ook nooit hebt gezien, laat staan dat je een idee hebt hoe het te maken…

2 Een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

2.1 De functie $f(n) = S^n(1)$

In de vorige sectie zagen we een bewijs dat $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}^+$ aftelbaar zijn. Dit betekent dus dat er een bijectie moet bestaan tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$. Dat was echter een bewijs dat niet echt een formule gaf tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$, het toonde gewoon aan dat deze even groot zijn. Nou zou je je kunnen voorstellen dat het zowiezo niet te verwachten is om een echte "formule" $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ te hebben die bijectief is. $\mathbb{Q}^+$ is gewoonweg te raar, het is een "wonder" dat het überhaupt aftelbaar is.

Maar dat is te snel gedacht.

Laten we de volgende functie definieren:

$$S(x) = \frac{1}{2[x] - x + 1}$$

Hier is $[x]$ weer de afronden-naar-beneden functie. Definieer nu :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$f(n) = S^n(1) = S(S(\ldots(S(1))\ldots)).$$

Reken eens de eerste zoveel $f(0), f(1), f(2), \ldots$ uit:

$$1 \longrightarrow S(1) = \frac{1}{2} \longrightarrow S(\frac{1}{2}) = 2 \longrightarrow S(2) = \frac{1}{3} \longrightarrow S(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \longrightarrow \ldots$$

De bewering is: **deze functie is een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Q}^+$!** Met andere woorden: de functie S wandelt, als je begint bij 1 en op de uitkomst steeds S toepast, door alle positieve rationale getallen heen. Elk positief rationaal getal komt precies 1x langs.

Dat klinkt allemaal te mooi om waar te zijn. Het is niet eens duidelijk dat er hier geen loop gaat onstaan, en zelfs als dat niet gebeurt, hoe zou je kunnen zien dat een specifiek element uit $\mathbb{Q}^+$ hier überhaupt in voorkomt? Ik bedoel, ga er maar aanstaan:

Te bewijzen:
f is injectief en surjectief.

Hoe bewijs je dat nou?!?!?

Om dit te bewijzen, moeten we eerst wat andere, ogenschijnlijk ongerelateerde dingen herhalen.

2.2 Het algorithme van Euclides

Gegeven een paar positieve gehele getallen n, m, dan kunnen we de grootste gemene deler $\text{ggd}(n, m)$ bepalen door het algorithme van Euclides. Je kunt dit algorithme op meerder manieren geven, dit is een van de manieren die waarschijnlijk lijkt op wat je al eens gezien hebt:

1. INPUT (n, m).

2. Als $n = 0$ dan STOP: m is de ggd.

3. Als $m = 0$ dan STOP: n is de ggd.

4. Als $n \geq m$ dan vervang (n, m) door $(n - dm, m)$ waar $a \in \mathbb{N}$ en $0 \leq n - dm < m$.
   Ga naar stap 1.

5. Als $n < m$ dan vervang (n, m) door $(n, m - dn)$ waar $a \in \mathbb{N}$ en $0 \leq m - dn < n$.
   Ga naar stap 1.

Als voorbeeld: bepaal de ggd van 37 en 7. Dan maakt het algorithme :

$(37, 7)$ (eerste input)
$(2, 7)$ (dit gebeurt in stap 4: $37 - 5 \cdot 7 = 2$, nu ga je terug naar stap 1.)
$(2, 1)$ (dit gebeurt in stap 5: $7 - 3 \cdot 2 = 1$, nu ga je terug naar stap 1.)
$(0, 1)$ (dit gebeurt in stap 4: $2 - 2 \cdot 1 = 0$, nu ga je terug naar stap 1.)
STOP in stap 2: de ggd is 1.

We geven nu een kleine variatie op het algorithme van Euclides, in plaats van $(n, m) \longrightarrow (n - dm, m)$ waar d een zo groot mogelijk gekozen geheel getal is, doen we nu $(n, m) \longrightarrow (n - m, m)$ - deze versie zal dus meer stappen nodig hebben:

1. INPUT (n, m).

2. Als $n = m$ dan STOP: m is de ggd.

3. Als $n > m$ dan vervang (n, m) door $(n - m, m)$.
   Ga naar stap 1.

4. Als $n < m$ dan vervang (n, m) door $(n, m - n)$.
   Ga naar stap 1.

Het ziet er een beetje anders uit. Voor het voorbeeld $(37, 7)$ krijgen we de volgende reeks:

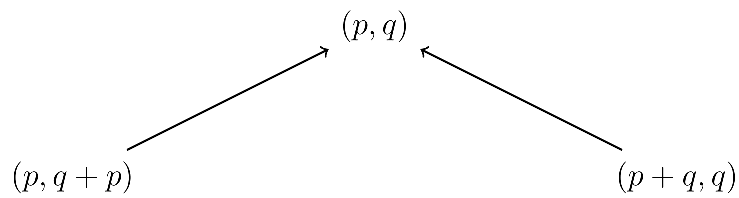
$$(37, 7) \longrightarrow (30, 7) \longrightarrow (23, 7) \longrightarrow (16, 7) \longrightarrow (9, 7) \longrightarrow (2, 7) \longrightarrow (2, 5) \longrightarrow (2, 3) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (1, 1)$$

en de conclusie is wederom dat 1 de ggd is.

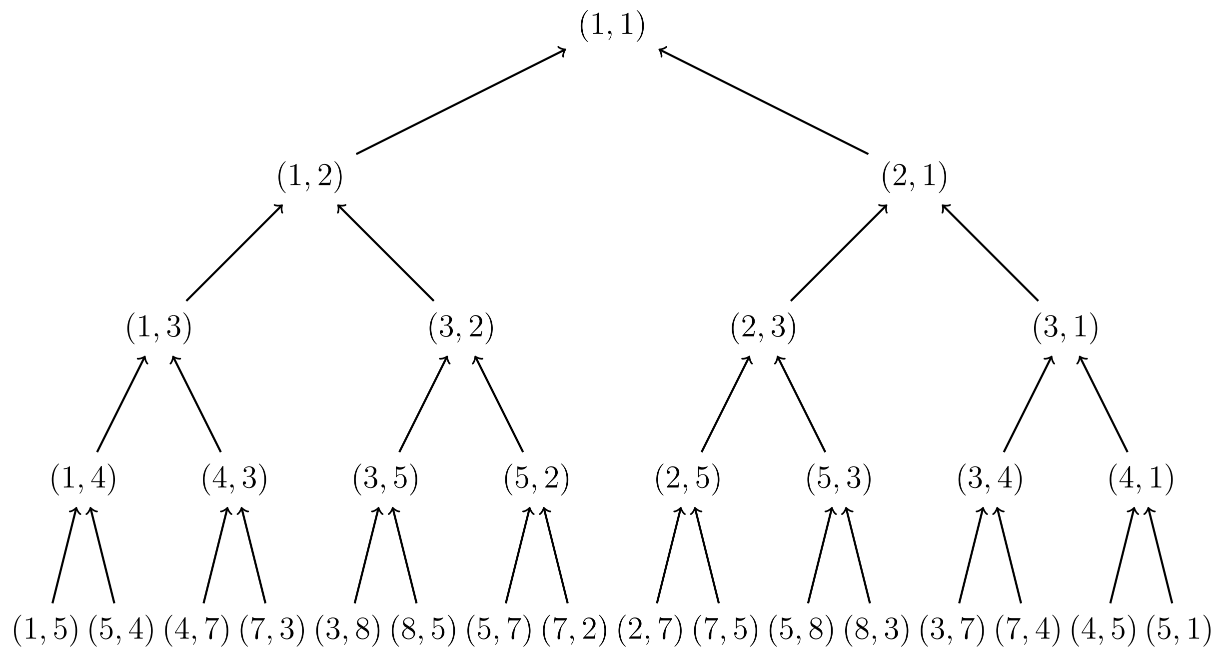
Laten we dit algorithme eens toepassen op alle paren (p, q) waar $\text{ggd}(p, q) = 1$. Dan is elke stap die het algorithme doet een stap $(p, q) \longrightarrow (p - q, q)$ of een stap $(p, q) \longrightarrow (p, q - p)$. Na een eindig aantal stappen kom je uit bij $(1, 1)$. Sterker nog, we kunnen zien dat voordat je bij $(1, 1)$ uitkwam, je bij $(1, 2)$ of $(2, 1)$ was geweest:

$$\begin{tikzcd}
 & (1,1) & \\
(1,2) \arrow[ur] & & (2,1) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

In het algemeen, als we nu bij (p, q) zijn aangekomen, dan weten we dat de vorige stap we bij $(p + q, q)$ of bij $(p, q + p)$ waren:



Als je dit consequent doet - de linker tak is $(p, q+p)$, de rechter tak is $(p+q, q)$ - dan kun je zo een boom maken vanuit (1,1):



Overtuig jezelf dat je deze boom maar op 1 manier kunt maken! Het moge duidelijk zijn dat nog meer "lagen" van deze boom tekenen een hels karwei is, er komen steeds dubbel zo veel paren bij. Laten we deze boom - als ik het goed heb genaamd boom van Euclides[1] - eens nader onderzoeken.

Lemma 2.1. *Elk paar* (p, q) *met* $\text{ggd}(p, q)$ *komt in deze boom voor, en precies 1 keer.*

Bewijs: Je kunt dit bijvoorbeeld met inductie doen naar $\max(p, q)$. Echter, een iets simpeler bewijs (in de auteur's opinie) is als volgt:
Vanuit een paar (p, q) maak je een pad omhoog m.b.v. het algorithme van Euclides: elke keer als je stap 3 moet gebruiken, ga je links omhoog, elke keer als je stap 4 moet gebruiken, ga je rechts omhoog. Uiteindelijk kom je uit in (1,1) en is er maar 1 pad dat je belopen hebt: dat is dus de (enige) plek waar (p, q) zich bevindt in de boom. $\square$

2.3 De Calkin-Wilf boom

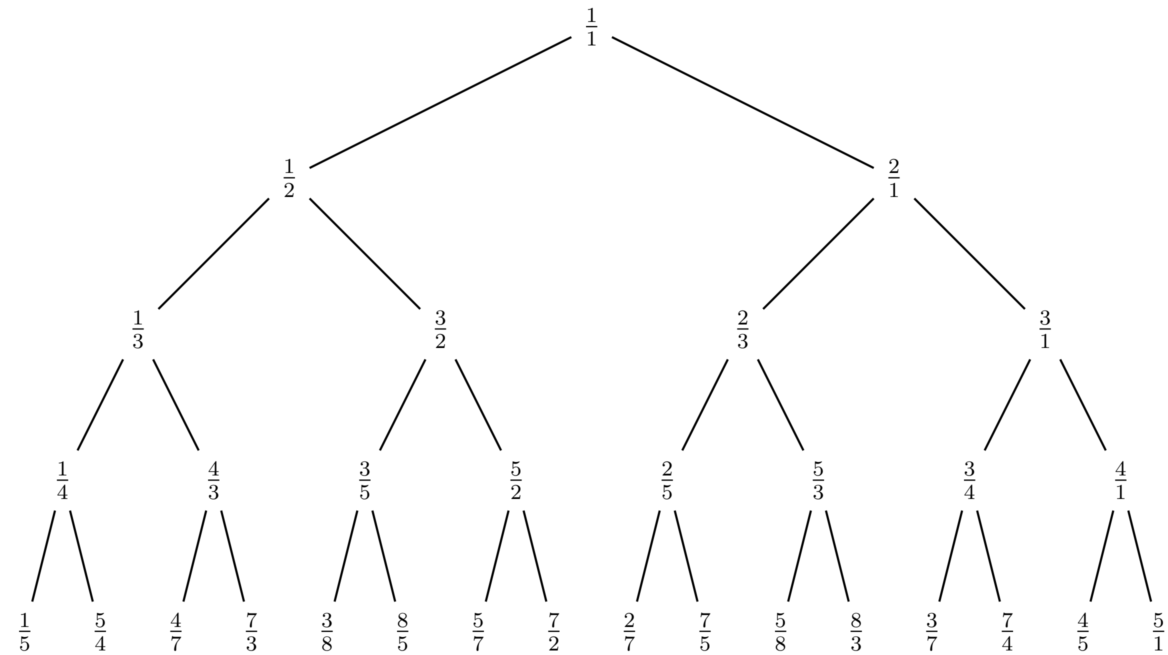
Bij een paar (p, q) waar $\text{ggd}(p, q) = 1$ kunnen we een breuk $\frac{p}{q}$ maken. Dat is dus een element uit $\mathbb{Q}^+$. Maar omgekeerd, als $x \in \mathbb{Q}^+$ dan is $x = \frac{p}{q}$, en als je eist dat $\text{ggd}(p, q) = 1$, dan zijn die p, q uniek! Dus:

[1] In het artikel waar dit manuscript op is gebaseerd, werd het "Euclid tree" genoemd. Echter, als je googelt naar "Euclid tree" kom je uit op een daadwerkelijke boom, de op 16 na dikste boom ter wereld…

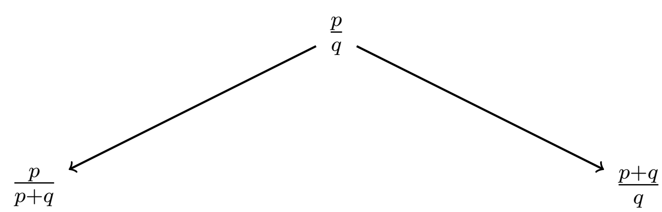
Lemma 2.2. *De paren* (p,q) *met* $\operatorname{ggd}(p,q)=1$ *staan in 1-1 correspondentie met elementen uit* $\mathbb{Q}^+$ *door de afbeelding*

$$(p,q) \longrightarrow \frac{p}{q}.$$

Dit betekent dat we op dezelfde manier een boom kunnen maken met elementen uit $\mathbb{Q}^+$:



Hier is dus wederom de regel als volgt:



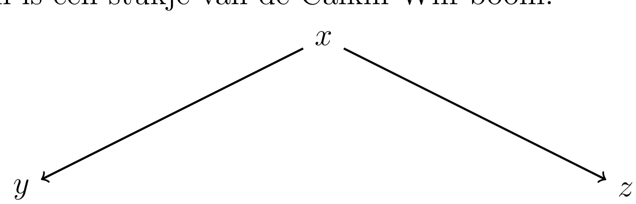
Elke "ouder" $\frac{p}{q}$ heeft een "linkerkind" $\frac{p}{p+q}$ en een "rechterkind" $\frac{p+q}{q}$.
Deze boom wordt soms de "Calkin-Wilf-tree" (of boom, dus) genoemd.

Lemma 2.3. *In de Calkin-Wilf-tree komt elk element uit* $\mathbb{Q}^+$ *precies 1 keer voor.*

Bewijs: Dit is eigenlijk een directe combinatie van de lemmas **??** en **??** ! Elk element in de boom correspondeert met een paar (p,q) (lemma **??**) en elk zo'n paar komt op precies 1 plek voor (lemma **??**). $\square$

Nou best wel tof dat er zo'n boom van alle elementen van $\mathbb{Q}^+$ is. Laten we even wat puzzelen met deze boom.

Opgave 2.4. Gegeven is een stukje van de Calkin-Wilf-boom.



Hier zijn x, y, z dus elementen uit $\mathbb{Q}^+$.
a) Geef een formule die y en z uitdrukt in x.
b) Geef een formule die x uitdrukt in y.
c) Geef een formule die x uitdrukt in z.
d) Geef een formule die z uitdrukt in y.

Uitwerking:
a) Als $x = \frac{p}{q}$, dan

$$z = \frac{p+q}{q} = \frac{p}{q} + 1 = x + 1.$$

$$y = \frac{p}{p+q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p+q} = x \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{x+1}.$$

b)

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow (x+1)y = x \Rightarrow (y-1)x = -y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

c) Da's dan niet zo moeilijk - $x = z - 1$.
d)

$$z = x + 1 = \frac{y}{1-y} + 1 = \frac{1}{1-y}.$$

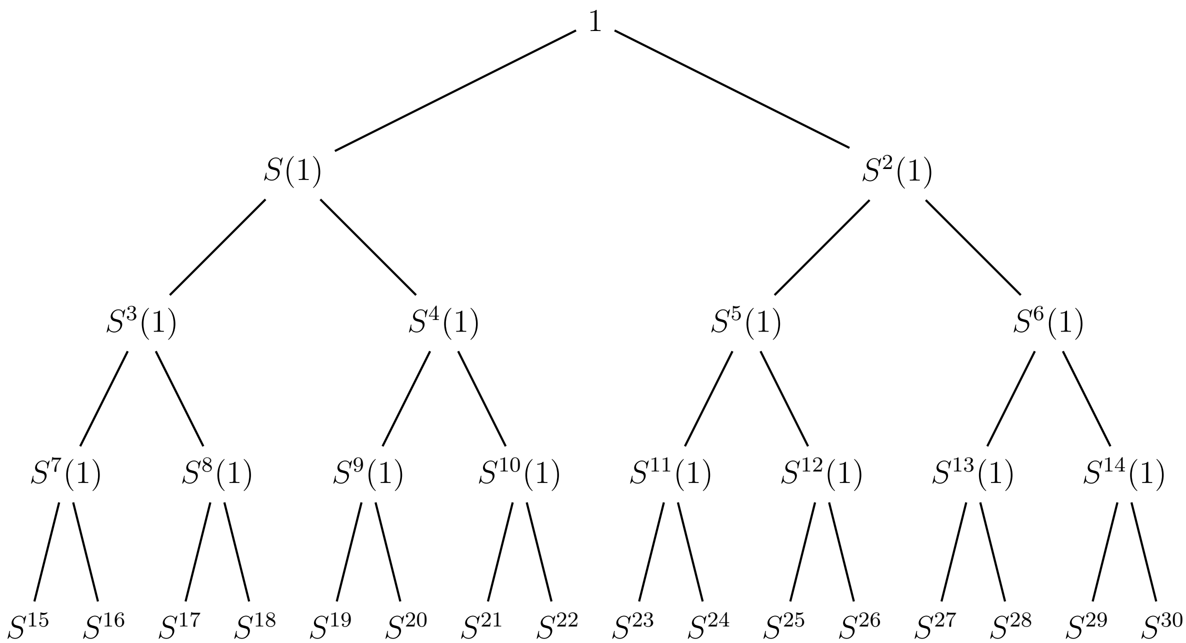
Even samenvattend in diagrammen:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{x}{x+1} & & x+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \frac{y}{1-y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y & & \frac{1}{1-y} \end{tikzcd}$$

2.4 De functie $S(x)$

Laten we Calkin-Wilf boom eens voor ons houden. Nu reken eens de eerste zoveel (zeg 16) iteraties van $S^n(1)$ uit, en ga eens kijken hoe die in die boom voorkomen.



HOE KAN DAT NOU ??? Dat die functie van een linkerknoop van een splitsing naar een rechterknoop springt kan ik me nog voorstellen, maar hoe hopst ie feilloos over van een rechterknoop naar de eerstvolgende linkerknoop? En hij ziet zomaar *dat ie aan het einde van de regel komt, en begint vooraan bij de volgende regel?!?!????*
Ik weet niet wat u ervan vindt, maar ik vind het verbazingwekkend.
We zullen de rest van deze sectie besteden aan het bewijzen dat de functie S inderdaad altijd dit gedrag vertoont.
Allereerst, iets dat we zonder veel moeite kunnen inzien is dat de knopen aan de rechterkant van de Calkin-Wilf boom steeds de waarde $\frac{n}{1}$ hebben: als de waarde $\frac{p}{q} = \frac{n}{1}$ is, dan is het rechter "kind" van deze de waarde $\frac{p+q}{q} = \frac{n+1}{1}$. Op dezelfde manier zie je dat de waardes van de knopen aan de linkerkant van de boom $\frac{1}{n}$ hebben.
Dat leidt ons naar ons eerste lemma:

Lemma 2.5. *Als je S toepast op een waarde $\frac{n}{1}$ helemaal rechts aan de boom, dan krijg je $S(\frac{n}{1}) = \frac{1}{n+1}$*

Bewijs:

$$S(n) = \frac{1}{2[n] - n + 1} = \frac{1}{n+1}.$$

□

Nou dat was niet zo moeilijk. Dan nu het volgende lemma:

Lemma 2.6. *Een waarde van een linkerknoop gaat na toepassing van S naar de waarde aan de rechterknoop.*

Bewijs: Het is handig om een stukje boom te tekenen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \frac{p}{q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{p}{p+q} & & \frac{p+q}{q} \end{tikzcd}$$

Het lemma zegt dus dat $S(\frac{p}{p+q}) = \frac{p+q}{q}$, dus laten we proberen dat te bewijzen:

$$S\left(\frac{p}{p+q}\right) = \frac{1}{2[\frac{p}{p+q}] - \frac{p}{p+q} + 1} = \frac{1}{2 \cdot 0 - \frac{p}{p+q} + 1} = \frac{1}{-\frac{p}{p+q} + \frac{p+q}{p+q}} = \frac{1}{\frac{q}{p+q}} = \frac{p+q}{q}.$$

$\square$

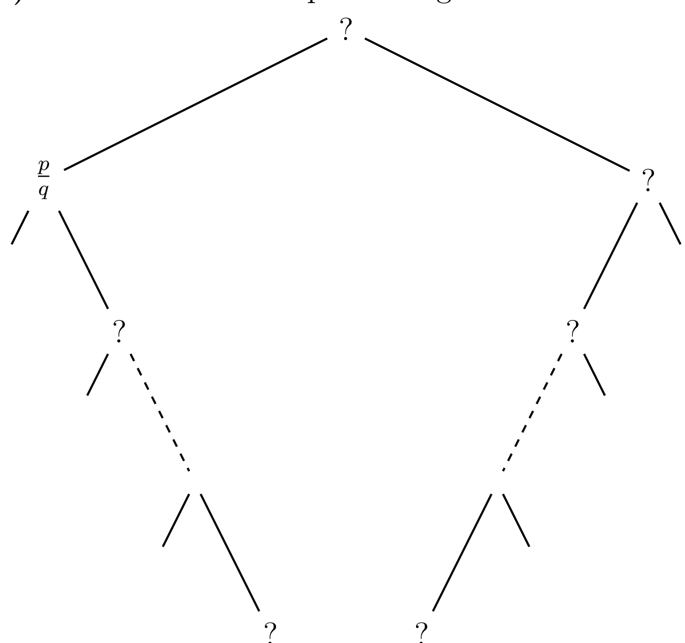
Er rest nog een geval:

Lemma 2.7. *Een waarde van een rechterknoop verspringt onder S naar de eerstvolgende linkerknoop.*

We stellen het bewijs eventjes uit tot we nog wat handige dingen hebben gedaan.

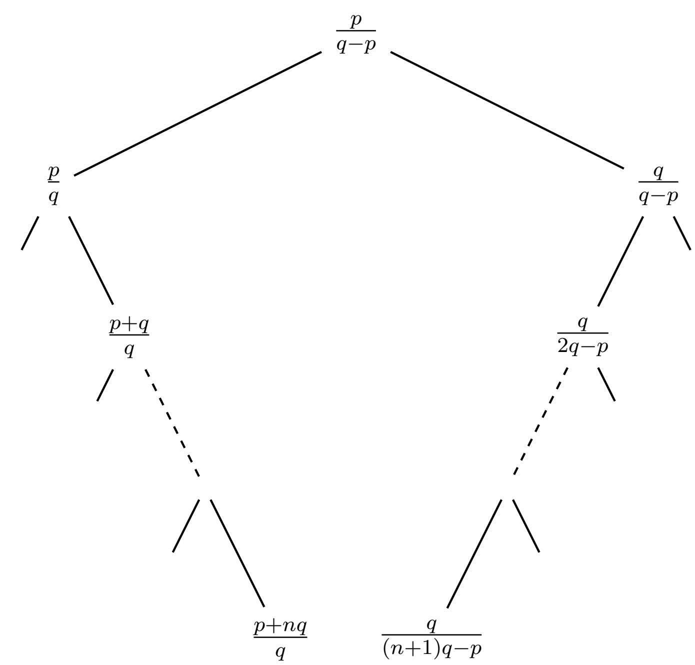
Opgave 2.8. Gegeven is dit deel van de boom: vanuit de top is er een stap naar links, en n stappen naar rechts gedaan. Aan de andere kant is er een stap naar rechts, en n stappen naar links gedaan.

a) Vul de waardes in op de vraagtekens.



b) Kun je iets zeggen over $[\frac{p}{q}]$ in dit diagram?

Uitwerking: **a)**



b) De linkerknoop is altijd een waarde < 1, want als je begint met $\frac{r}{s}$, dan heeft de linkerknoop waarde $\frac{r}{s+r} < 1$. Dus $[\frac{p}{q}] = 0$.

Dit bovenstaande diagram is precies het diagram die het zo gemakkelijk mogelijk maakt om lemma **??** te bewijzen. Je had ook b.v. de bovenste node $\frac{p}{q}$ kunnen noemen, dat kon ook, en dan verder alles narekenen. Iets wat niet zo goed werkt is bijvoorbeeld de knoop linksonder de waarde $\frac{p}{q}$ te geven en dan uit te rekenen hoe de rechterknoop beneden uitziet. Deze hebben allemaal als nadeel dat de S-waarde van de waarde bij de linkerbenedenknoop wat lastiger is uit te rekenen. In de boom die wij kozen, is $[\frac{p}{q}] = 0$ en je zult zien dat dat inderdaad fijner rekenen is. Maar: niets houd je tegen, dus maak een boom waar $\frac{p}{q}$ elders geankerd is dan de linkerknoop op rij 2, en bewijs lemma **??**! (Het is zeker mogelijk!)

Bewijs: (van lemma **??**) We moeten laten zien dat $S(\frac{p+nq}{q}) = \frac{q}{(n+1)q-p}$, waar gegeven is dat $p < q$.

$$S\left(\frac{p+nq}{q}\right) = \frac{1}{2\left[\frac{p+nq}{q}\right] - \frac{p+nq}{q} + 1} = \frac{1}{2n - \frac{p+nq}{q} + 1} = \frac{q}{2nq - (p+nq) + q} = \frac{q}{(n+1)q - p}.$$

□

De bovenstaande lemmas hebben nu dus tot gevolg dat de volgende stelling bewezen is:

Stelling 2.9. *(Hoofdstelling van deze sectie) De reeks* $1, S(1), S^2(1), \ldots$ *doorloopt de Calkin-Wilf boom regel voor regel, van links naar rechts.*
De functie $f(n) = S^n(1)$ *geeft een bijectie van* $\mathbb{N}$ *naar* $\mathbb{Q}^+$.

Een waarlijk bijzondere stelling en een waarlijk verassende functie S. Er zijn wat opmerkingen te maken:

Opmerking 1: We hebben weliswaar bewezen dat S de boom doorloopt, we kunnen met ons vingertje elke bewering bewijzen, maar het is misschien nog niet een echt *begrip* van *waarom*

de functie precies dit gedrag vertoont. Ik bedoel - als je kunt aantonen dat lemmingen zich massaal van een klif afstorten, betekent dat nog niet dat je echt begrijpt waarom. . . :-p
Een gedachte hierbij is ook: hoe had je de formule S kunnen verzinnen of achterhalen als je de Calkin-Wilf boom ziet en je wilt zo'n functie maken?

Opmerking 2: We hebben helemaal niet op de "standaardmanier" bewezen dat de functie $f(n) = S^n(1)$ injectief en surjectief is. We hebben laten zien dat ie de rijen van de Calkin-Wilf boom een voor een afloopt, en we wisten al dat dit precies de getallen uit $\mathbb{Q}^+$ doorloopt. Het feit dat f dus een bijectie is, is een gevolg hiervan. Maar we hebben niet iets gedaan als "Neem aan dat $f(n) = f(m)$. Te bewijzen dat $n = m$" etcetera.

3 Schröder-Bernstein

Voor de volledigheid geven we hier een bewijs geven van:
Stelling: (Schröder-Bernstein) $|A| \leq |B|$ en $|B| \leq |A|$ impliceert $|A| = |B|$.

Bewijs: Het bewijs is een beetje getruukt, maar het is goed te begrijpen. We beginnen met de veronderstelling dat we $f : A \longrightarrow B$ and $g : B \longrightarrow A$ beide injectieve functies hebben.

We nemen ook aan: **A en B zijn disjunct.** Dit maakt het bewijs beneden gemakkelijker - als er overlap zit tussen A en B dan krijg je wat gedoe. Merk op dat dat geen probleem is. (Is het geen probleem?)
Allereerst, neem een element $a \in A$. Je kunt nu g erop los laten, en daarna f, etcetera, etcetera:

$$a \longrightarrow f(a) \longrightarrow g(f(a)) \longrightarrow \ldots$$

Die reeks gaat oneindig lang naar rechts door (we eisen (nog) niks over dat de elementen moeten verschillen). Maar, we kunnen (soms) de reeks naar links voortzetten. Niet altijd, maar vaak wel: Als $a \in A$, dan *kan* er een $b \in B$ bestaan met $g(b) = a$. Merk op: omdat g injectief, als b bestaat dan is ie uniek. We schrijven $b = g^{-1}(a)$ als het bestaat.

Net zo, we kunnen voor elke $b \in B$ op zijn hoogst een $a \in A$ vinden zodat $f(a) = b$. We schrijven $a = f^{-1}(b)$ als dit element a bestaat. in case this element a exists.
Samenvattend, we kunnen (of kunnen niet) de reeks (voor een tijdje) naar links uitbreiden:

$$\ldots \longrightarrow f^{-1}(g^{-1}(a)) \longrightarrow g^{-1}(a) \longrightarrow a \longrightarrow f(a) \longrightarrow g(f(a)) \longrightarrow \ldots$$

We breiden de reeks uit zo ver als we kunnen naar links. We hebben dus een boel reeksen, en sommige stoppen links ergens, sommige niet. Merk op dat sommige reeksen best periodiek kunnen zijn (en dan zijn ze oneindig lang naar links). Dat vinden we niet erg.
Nu maken we de volgende opmerkingen:
De reeksen zijn disjunct. Namelijk, als in een reeks het element x voorkomt, dan ligt elke opvolger en (eventuele) voorganger van x uniek vast! x zit of in A, of in B, en de opvolgers en voorgangers liggen vast door f of g. Als x dus in twee reeksen voorkomt, dan zijn deze reeksen dezelfde reeks, want x legt de hele reeks vast.
Elk element van A en B komt in precies één reeks voor. Dit volgt uit constructie, bij x maak je de reeks door voorgangers en opvolgers te maken.

Dus, je hebt eigenlijk een partitie van $A \cup B$ door middel van je reeksen !

Merk nu op dat er drie types reeksen zijn:
(1) Oneindig-naar-links reeksen (die nooit stoppen als je naar links gaat).

$$\ldots \longrightarrow f^{-1}(g^{-1}(a)) \longrightarrow g^{-1}(a) \longrightarrow a \longrightarrow f(a) \longrightarrow g(f(a)) \longrightarrow \ldots$$

(2) A-stop-reeksen (waar het meest linkse element a in de reeks uit A komt, en er geen $b \in B$ bestaat zodat $g(b) = a$),

$$a \longrightarrow f(a) \longrightarrow g(f(a)) \longrightarrow \ldots$$

(3) B-stop-reeksen (waar het meest linkse element b in de reeks uit B komt, en er geen $a \in A$ bestaat zodat $f(a) = b$),

$$b \longrightarrow g(b) \longrightarrow f(g(b)) \longrightarrow \dots$$

Nu, als we een element $a \in A$ nemen, dan is het in *precies* één reeks, en dus in precies één van deze drie types.

Nu gaan we een bijectie $h : A \longrightarrow B$ definiëren! We doen we het volgende:
Als a in een A-stopper reeks (2) OF in een oneindige reeks (1) zit, dan definieer $h(a) = f(a)$.
Als a in een B-stopper reeks (3) zit, dan definieer $h(a) = b$ waar b zo is dat $g(b) = a$ (i.e. $b = g^{-1}(a)$). Dit kan *altijd*, omdat elk element in deze reeks dat uit A komt, een "linkerbuurman" heeft.

De claim is nu: $h : A \longrightarrow B$ is een bijectie. Laten we dat bewijzen.

(Injectief:) Neem aan dat $a_1, a_2 \in A$ zodat $h(a_1) = h(a_2) = b$. Er is maar één reeks die b bevat. Deze reeks is maar van één van de types (1),(2),(3), en dus heb je b deterministisch gekozen als het beeld van zijn voorganger (in geval (3),(2)) of opvolger (in geval (1), (2)). In ieder geval, a_1 en a_2 zijn allebei deze zelfde unieke voorganger/opvolger.

(Surjectief:) Kies $b \in B$. b is in precies één reeks.
In geval de reeks een A-stopper reeks (2) of een oneindige reeks (1) is, dan is er een element $a \in A$ voor b en je definieerde $h(a) = f(a) = b$.
In geval de reeks een B-stopper reeks (3) was, dan is er altijd een element $a = g(b)$ na b, en je hebt gedefinieerd $h(a) = b$. *Dit is het punt waarom het belangrijk is dat je met de elementen in de B-reeks wat anders deed. Hier kun je niet altijd een voorloper kiezen, maar wel altijd een opvolger.*
In alle gevallen is er dus een $a \in A$ zodat $h(a) = b$, dus h is surjectief. $\square$

References

[1] Aimeric Malter, Dierk Schleicher, Don Zagier, *New Looks at Old Number Theory* The American Mathematical Monthly, Vol. 120, No. 3 (March 2013), pp. 243-264 (22 pages) https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.03.243