1

Lesbrief 1: Inertiaalstelsels

1.1 Introductie

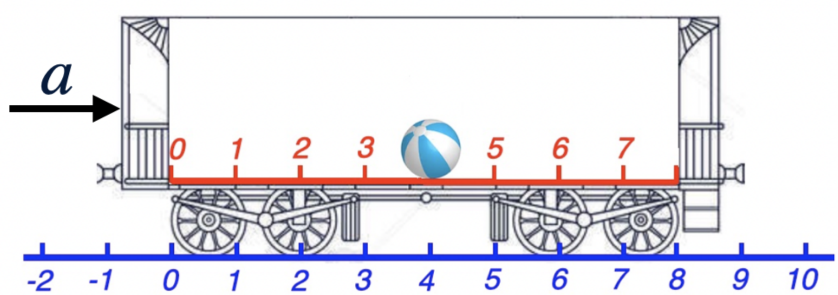
De Eerste Wet van Newton lijkt niet zo belangrijk. Op eerste gezicht lijkt het namelijk net alsof je die niet eens nodig hebt. Kijk maar, neem de Tweede Wet van Newton $F = ma$ en vul daar in dat er geen netto kracht is, $F = 0$. Dan komt er vanzelf uit dat de massa m met een constante snelheid beweegt, $a = 0$. En aangezien die constante snelheid in drie richtingen geldt, krijg je ook nog eens een rechte lijn. Conclusie: de Eerste Wet van Newton kan worden afgeleid uit de Tweede, en is daarom eigenlijk overbodig. Je kan die eerste net zo goed weglaten. Nietwaar?

Niet waar. De Eerste Wet van Newton is van verschrikkelijk groot belang. Zoals je weet vertelt zij ons het principe van traagheid dat we boven al zagen: dat massa graag in een rechte lijn en met constante snelheid beweegt. Maar zij vertelt ons iets veel fundamentelers. De bewegingswetten van Newton werken alleen in heel speciale waarnemerstelsels, de zogenaamde *inertiaalstelsels*. Maar hoe weet je of je in een inertiaalstelsel bent? Dat kan de Tweede Wet je niet vertellen, maar de Eerste Wet wél. Daarnaast zijn inertiaalstelsels ook wat de Speciale van de Algemene Relativiteitstheorie onderscheiden. Hoog tijd dus om de Eerste Wet van Newton eens goed onder het vergrootglas te nemen, en haar unieke superpowers te ontdekken!

1.2 Wat zijn inertiaalstelsels?

We beginnen met een vraag. Gelden de wetten van Newton altijd, in elke situatie? Natuurlijk weten we dat ze niet meer standhouden als de dingen heel snel gaan (dan moet de Relativiteitstheorie het overnemen), of als de massa's heel klein zijn (dan heb je de quantummechanica nodig), maar dat bedoel ik niet. De vraag is: gelden de wetten van Newton bij alledaagse voorwerpen en bij alledaagse snelheden om hun beweging te beschrijven? Het antwoord, verrassend genoeg, is nee.

Laten we, om dit aan te tonen, naar twee referentiesystemen kijken. Eén, in blauw, is op de spoorails geschilderd, de andere, in rood, is op de vloer van een treinwagon geschilderd. In beide systemen plaatsen we een massa, een bal, op positie '4'. Het punt is: we zullen ervoor zorgen dat de trein en de spoorrails een relatieve versnelling a hebben. Tot zover het uitgangspunt van de situatie.



De nettokracht op de bal is nul: in verticale richting is de zwaartekracht precies in evenwicht met de normaalkracht van de vloer, en in horizontale richting zijn er geen krachten. De bal mag dus niet versnellen. En aangezien de bal in beide stelsels begon met constante snelheid zou die snelheid niet mogen veranderen. Maar als het rode en blauwe systeem een relatieve versnelling hebben, kan de bal niet in beide systemen een constante snelheid hebben[1]. Als hij in het rode stelsel op '4' blijft staan, versnelt hij in het blauwe kader naar rechts. Als hij op '4' in het blauwe stelsel blijft staan, versnelt hij in het rode naar links. Dus in ieder geval in één van de twee stelsels zal de bal versnellen zonder dat er een kracht op werkte: de Tweede Wet van Newton werkt niet.

Deze vraag is geen valstrik, maar zegt iets heel fundamenteels: er bestaan referentiestelsels waarin de Wetten van Newton wél gelden, de zogenaamde *inertiaalstelsels*, en stelsels waarin dat niét het geval is, de zogenaamde *niet-inertiaalsstelsels*. Dit is uiterst belangrijk, want als we

[1] Trouwens, hoe weet de bal eigenlijk ten opzichte van wélk van deze twee stelsels hij stil moet staan? De grond misschien? Want het is toch de trein die 'echt' versnelt (omdat daar een treinmotor en een machinist aan te pas komt)? Maar staat de grond dan wél 'echt' stil? Ten opzichte van de zon niet, bijvoorbeeld, en ook niet ten opzichte van het Andromedastelsel. Er is geen enkele reden om het aardoppervlak te zien als een 'stilstaand' stelsel. Het enige wat we kunnen zeggen is dat de twee stelsels een *relatieve* versnelling hebben. Als dit argument je niet overtuigt, leg de bal dan eens in de diepe ruimte, weg van alles. Definieer opnieuw twee referentiestelsels, blauw en rood, die ten opzichte van elkaar versnellen. Deze keer zitten deze niet vast aan grond, trein, of andere objecten, dus hoe weten we nu welk het 'versnellende stelsel' is en welk het 'stilstaande'?

van een gegeven referentiestelsel niet weten of het een inertiaalstelsel is of niet, weten we ook niet of de Wetten van Newton ons de juiste voorspellingen zullen geven! Ook is het herkennen van inertiaalstelsels belangrijk voor het opbouwen van de relativiteitstheorie; daar komen we straks op terug.

Soms wordt een inertiaalstelsel nog wel eens gedefinieerd als: "een stelsel dat met constante snelheid beweegt." Tja, dat is een volledig lege uitspraak. Snelheden kun je alleen een waarde geven als je zegt ten opzichte waarvan die snelheid gemeten moet worden. Het stelsel waarin ik mij bevind terwijl ik dit schrijf beweegt met constante snelheid ten opzichte van mijn bureaustoel, maar is aan het versnellen ten opzichte van de zon. Ben ik nu in een inertiaalstelsel of niet?
Een inertiaalstelsel definiëren aan de hand van zijn snelheid, vereist dus dat er al een ander stelsel bekend was. Wel is het zo dat als we weten dat dat andere stelsel een inertiaalstelsel is, elk ander stelsel dat daar ten opzichte van met constante snelheid beweegt, óók een inertiaalstelsel is. Maar ja, dan hadden we dat dus wel van dat andere stelsel al moeten weten.
We hebben daarom veel meer aan een definitie van inertiaalstelsel die niét afhankelijk is van eerder gevonden stelsels. Daarom worden inertiaalstelsels gedefinieerd aan de hand van de Wetten van Newton: dan kun je aan de beweging van massa's *in* zien of dat stelsel een inertiaalstelsel is of niet, zonder ooit naar andere stelsels te hoeven wijzen. Dat is precies wat de Eerste Wet van Newton voor ons doet, zoals we straks zullen zien.

1.3 Schijnkrachten

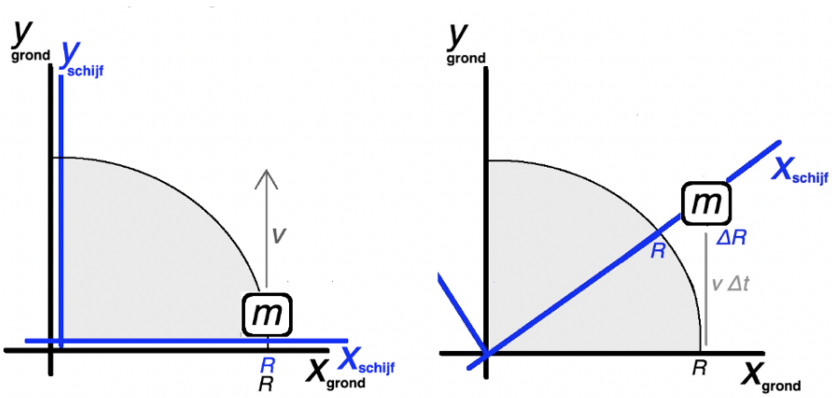
Ok, tot zover de introductie van het begrip inertiaalstelsel. We kunnen we nu de volgende vraag stellen: wat gebeurt er in niet-inertiaalstelsels? Als de Newtoniaanse mechanica daar niet werkt, zoals ik boven beweer, wat moeten we dan doen?

Het antwoord is iets dat we al in het vorige voorbeeld met de trein zagen: als het referentiestelsel van de grond een inertiaalstelsels is, dan heeft de bal, bezien vanuit het niet-inertiaalstelsel van de trein, een versnelling. Iemand in het treinstelsel zal dus concluderen dat er een kracht op de bal werkte. Voor de duidelijkheid: die kracht bestaat helemaal niet! Zo'n waargenomen kracht, die er dus eigenlijk niet is, noemen we een *schijnkracht*. schijnkrachten verschillen van échte krachten, zoals elektromagnetisme of spankracht enz.: die vereisen een interactie van de bal met de buitenwereld. Bijvoorbeeld een elektrisch veld, of een veer. In ons voorbeeld is dat niet het geval. De versnelling die de bal heeft is alleen maar het gevolg van het feit dat we de bal proberen te beschrijven vanuit een niet-inertiaalstelsel, niet omdat er van buiten iets trekt of duwt.

Laten we een voorbeeldje uitwerken! We zullen een beroemde schijnkracht afleiden[2]: de centrifugaalkracht! Het is wat je voelt als je in een draaimolen zit en naar buiten wordt geslingerd terwijl de draaimolen ronddraait.

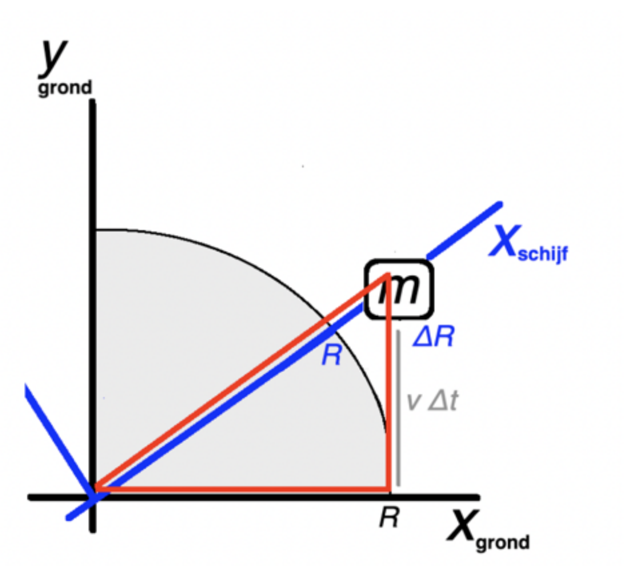
[2] Trouwens, de centrifugaalkracht werd voor het eerst al eens afgeleid in 1673, door Christiaan Huygens.

Ik zal de formule ervan in een paar stappen afleiden.
We beginnen met een schematisch tekeningetje van de draaimolen, hier in blauwe assen, en de grond, hier in zwarte assen. De tekening is een bovenaanzicht van de draaischijf van de draaimolen.



Ik heb een momentopname gemaakt waarbij hun x- en y-assen elkaar perfect overlappen; dit is het linkerplaatje. Neem een massa m, opnieuw een bal, die op de foto's omhoog beweegt, en laten we bekijken hoe zijn beweging eruit zien vanuit ieder van de twee stelsels. We gaan weer uit van de situatie waarin er geen netto (echte) krachten op de bal werken. Omdat het zwarte systeem een inertiaalstelsel is, beweegt de bal daarom met een constante snelheid in een rechte lijn. Dus een momentopname later, in het rechterplaatje, zal de massa iets verder langs de y-as zijn. In diezelfde tijd is de draaimolen een beetje rondgedraaid, zoals aangegeven. Merk nu op dat de massa zich nog steeds op locatie $x = R$ bevindt langs de zwarte as, maar gemeten langs de blauwe as zal de massa zich niet meer op $x = R$ bevinden, maar iets daarbuiten. Die hoeveelheid noem ik ΔR. De waarnemers die de blauwe x-as gebruiken, zullen daarom concluderen dat er een kracht op de bal gewerkt heeft waardoor deze naar buiten werd getrokken. Die kracht is er niet: de bal beweegt vrolijk met constante snelheid in een rechte lijn ten opzichte van het zwarte stelsel; het is enkel vanwege het gebruik van de blauwe as dat er een kracht *lijkt* te zijn. We kunnen gemakkelijk een formule voor deze schijnkracht afleiden. We hoeven alleen maar een uitdrukking voor ΔR te vinden, daarna kunnen we twee tijdafgeleiden nemen en krijgen we de versnelling van de bal langs de blauwe x-as. Keer de massa, geeft dan de schijnkracht. Tot zover het plan, nu de uitvoering!

We kunnen een uitdrukking voor ΔR vinden door een driehoek te tekenen; hier in rood gedaan.



De schuine zijde is gelijk aan R plus ΔR. De horizontale zijde is R, en de verticale zijde geeft aan hoeveel de massa naar boven is bewogen in de tijd tussen de twee momentopnamen: v maal Δt. Door nu de stelling van Pythagoras te gebruiken en een beetje te herschikken, vinden we deze formule:

$$\frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 = \frac{(v \cdot \Delta t)^2}{2R^2} \tag{1.1}$$

Ik schreef deze vergelijking expres in de vorm waarin $\Delta R/R$ en $(\Delta R/R)^2$ voorkomen, omdat het helpt bij het volgende stapje. Als we aannemen dat de tijd tussen de momentopnamen erg klein is, zal de massa niet veel verplaatst zijn, waardoor $\Delta R/R$ veel kleiner is dan 1. Kwadraten van getalletjes kleiner dan 1 zijn nóg veel kleiner, dus we kunnen het kwadraat van $\Delta R/R$ net zo goed volledig verwaarlozen vergeleken met $\Delta R/R$. Dit geeft ons de uitdrukking voor de ΔR waarnaar we op zoek waren[3]:

$$\Delta R = \frac{(v \cdot \Delta t)^2}{2R}. \tag{1.2}$$

Nu we ΔR hebben gevonden, kunnen we de twee tijdsafgeleiden ervan nemen en de versnelling van de massa vinden, gemeten langs de blauwe x-as. Dit geeft ons $a = v^2/R$. Vermenigvuldigd met de massa, geeft dit de bekende formule voor de *centrifugaalkracht*, die je vast en zeker bij je leerlingen gebruikt en uiteraard ook in Binas staat:

$$F = \frac{mv^2}{R} \tag{1.3}$$

We zien dus dat de centrifugaalkracht geen échte kracht is: het effect is gewoon een massa die vrolijk in een rechte lijn en met constante snelheid beweegt in het zwarte inertiaalsysteem, maar gezien vanuit het blauwe niet-inertiaalstelsel een versnelling heeft. Centrifugaalkracht is een schijnkracht!

[3] Als het je stoort om $\Delta R/R$ kwadraat weg te gooien, geen zorgen: het enige wat we deden is het nemen van de limiet, waarbij de getalletjes zó klein zijn dat alles wat we weggooien te verwaarlozen is. Dat is hier prima, want we gaan zometeen een tijdsafgeleide nemen om de versnelling te vinden, en een afgeleide is per definitie de afstanden en tijdsduren als oneindig klein nemen. Als je er nog steeds last van hebt, kun je ook uit 1.1 via de ABC-formule de uitdrukking voor ΔR vinden, en vanuit daar verder rekenen zonder gekke (maar correcte!) limieten te nemen. Het eindantwoord is hetzelfde: $F = \frac{mv^2}{R}$.

1.4 De Tweede Wet kan geen inertiaalstelsels vinden

Terug naar die eerdere vraag: Waarom is de Eerste Wet van Newton niet slechts een speciaal geval van de Tweede? Het antwoord is: met de Eerste Wet kan je inertiaalsystemen identificeren, en dat kan met de Tweede Wet niet. Nu we gezien hebben wat schijnkrachten zijn, kan ik dat heel precies laten zien.

Laten we eens die Tweede Wet opschrijven[4]: $F_{\text{netto}} = ma$. We hebben gezien dat als je in een niet-inertiaalstelsels bent, er een schijnkracht zal zijn. De Tweede Wet van Newton zal dan dus niet alleen de echte krachten aan de ene kant hebben, maar ook de schijnkracht:

$$F_{\text{echt}} + F_{\text{schijn}} = m\,a. \tag{1.4}$$

Als we nu willen weten of een referentiesysteem een inertiaalsysteem is, zullen we moeten aantonen dat F_{schijn} gelijk is aan nul.

[4] Als de massa niet constant is, is de wet $F = \frac{dp}{dt}$: de kracht is gelijk aan de verandering van de impuls $p = mv$. Bij constante massa werkt die tijdsafgeleide alleen op v, en krijg je netjes $F = ma$. De versie voor niet-constante massa kun je bijvoorveeld gebruiken bij opstijgende raketten, omdat ie onderweg massa afstoten.

Hoe dit te doen? Misschien door een experiment, waarin we naar de beweging van een massa m kijken. We meten de versnelling a, we kennen de massa m, en daarmee kunnen we de rechterkant van de Tweede Wet invullen. Maar de linkerkant heeft twee onbekenden: de echte kracht F_{echt} en de schijnkracht F_{schijn}. En het is een wiskundige onmogelijkheid om één vergelijking met twee onbekenden op te lossen. Kijk maar: $x + y = 10$ kan je niet vertellen wat de waarde is van x of wat de waarde is van y. Of dat misschien één van die twee gelijk is aan nul. Zo ook met de Tweede Wet: de meting van m en a Die kunnen we niet gebruiken om erachter te komen of $F_{\text{schijn}} = 0$, en dus of we ons in een inertiaalstelsel bevinden.

Dit is een leuke opdracht om aan een klas te vragen: kun jij een experiment bedenken dat, met alleen de Tweede Wet van Newton, laat zien of je in een inertiaalstelsel bent of niet?
De klas zou zoiets kunnen bedenken als wat we in het plaatje beneden zien: neem een opwindauto, het soort met een veer erin die kan worden opgewonden, en terwijl de veer zich afwikkelt, rijdt de auto over een baan.

Als we de echte krachten kennen die op de auto werken, kunnen we met behulp van de Tweede Wet berekenen op welk tijdstip de auto de finishlijn haalt, hier aangegeven door de vlaggenmast. Vervolgens doen we het experiment. Als de auto op het berekende tijdstip de vlaggenmast passeert (ervan uitgaande dat er geen fouten zijn gemaakt in de berekening en de meting nauwkeurig gedaan is), was er geen sprake van een schijnkracht en bevonden we ons dus in een inertiaalstelsel. Als de auto de vlag niét op het berekende tijdstip de finishlijn bereikt, kun je afleiden dat er een schijnkracht werkte en dat we ons niet in een inertiaalstelsels bevonden.

Klinkt heel waterdicht, maar helaas: dit gaat niet werken. We hebben in dit stappenplan een stiekeme veronderstelling gemaakt: we gingen ervan uit dat we de krachten op de auto kenden! Hier: de veerkracht van de veer. Maar dat betekent dat we deze kracht *vooraf* al kenden. Maar hoe komen we achter die kracht? Door de veer op te winden, de massa en versnelling van de auto te meten en deze in de Tweede Wet van Newton te plaatsen om de kracht F_{veer} te vinden. Maar we kunnen de Tweede Wet alleen gebruiken om de veerkracht te vinden *als we al wisten dat we de meting in een inertiaalstelsel uitvoerden*. Dat is een cirkelredenering: om het experiment uit te voeren om te zien of de auto in een inertiaalstelsel was, moeten we eerst een meting doen van de krachten en daarbij aannemen dat we in een inertiaalstelsel zijn.

Het heeft geen zin om de fabrikant van de veer te vragen om je de kracht te vertellen; dat betekent dat *hij* moest weten dat hij zich in een inertiaalstelsel bevond. Hoe zit het met de mensen die het materialen leverden waar de veer uit gemaakt werd? Nou, dan moeten *zij* in een inertiaalstelsel zijn geweest om de materiaaleigenschappen te meten. Hoe je het ook probeert, *iemand* in de keten moet van te voren hebben geweten dat ze in een inertiaalstelsel waren.

Het komt neer op die moeilijkheid die we eerder al zagen: zonder al van tevoren te weten dat je je in een inertiaalstelsel bevindt, bevat de Tweede Wet van Newton twee onbekenden[5] en slechts één gemeten getal.

[5] Dit probleem is niet een eigenschap van het voorbeeld met het opwindautootje, maar geldt voor *alle* experimenten. Probeer maar eens een ander voorbeeld, waarin er echte natuurkrachten en schijnkrachten tegelijk op een massa werken: in al die gevallen heb je meer onbekenden dan meetwaarden die je wél weet, en blijft het probleem bestaan dat je niet kan concluderen of $F_{\text{schijn}} = 0$.

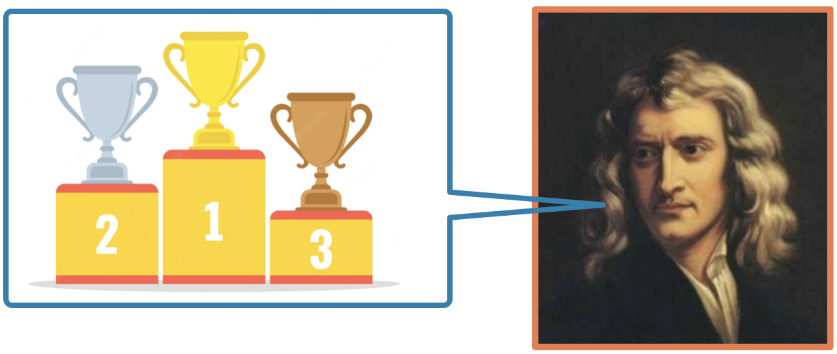
Nog een voorbeeld: wat als we een elektron nemen in een elektrisch veld? Dan weten we toch gewoon de echte kracht en zou het geen moeite moeten zijn om te bepalen of de schijnkracht nul is? Helaas. Dan had iemand in de keten bepaald moeten hebben dat het deeltje inderdaad een elektron is, door de kracht erop al gemeten te moeten hebben. En daarvoor moest diegene al in een inertiaalstelsel hebben gezeten.

1.5 De ware betekenis van de Eerste Wet

De Tweede Wet van Newton kan dus geen inertiaalstelsels vinden. Hoe moet je dat dan wél doen? Ik zei al dat het probleem uit de wiskunde komt: één gemeten waarde, m maal a, maar twee onbekenden: onmogelijk op te lossen! Maar wat als we simpelweg één van de twee onbekenden verwijderen: dan hebben we één gemeten getal en slechts één onbekende en dat kan wél worden opgelost. Omdat we nog niet weten of F_{schijn} nul is (daar proberen we juist achter te komen!), kunnen we die niet verwijderen. Maar we kunnen er wel voor zorgen dat er geen echte krachten op de massa inwerken. Dan heeft de wiskunde van de Tweede Wet slechts één onbekende over, en daarom kunnen we nu met een meting vaststellen of deze nul is of niet.

Ik heb zojuist de Eerste wet van Newton beschreven. Door expres ervoor te zorgen dat er geen echte natuurkrachten op een massa werken, zou de versnelling van de massa nul moeten zijn. Als dat het geval is, weten we meteen en onbeslist dat het referentiestelsel een inertiaalstelsel is. Zo niet, dan was er een schijnkracht aan het werk en was het referentiestelsel geen inertiaalstelsel.

Zo zien we dan Newton's Eerste Wet niet een speciaal geval is van de Tweede, maar gezien moet worden als een *recept*, een *test*: "Dit is wat je moet doen om te bepalen of de schijnkrachten nul zijn: afsluiten van alle echte krachten en de versnelling meten". Het is om deze reden dat we deze Wet de *Eerste* noemen: pas als een referentiesysteem de test doorstaan heeft, mag je verder gaan en in dit stelsel de Tweede en Derde Wet gebruiken. Dit is waarom het vóór de andere twee staat: het is de eerste stap die je moet doen als je mechanica wil gaan doen.



En die relativiteitstheorie? Ik beloofde al dat die nauw verweven zijn met inertiaalstelsels. In Lesbrieven 3 en 5 kom ik hier nog uitgebreid op terug, maar voor wie niet kan wachten komt nu alvast even het korte antwoord: de Speciale Relativiteitstheorie mag alleen worden gebruikt in inertiaalstelsels, en als je de natuur wil bekijken vanuit een niet-inertiaalstelsel moet je overstappen op de Algemene Relativiteitstheorie[6]. Daarmee is de rol van de Eerste Wet nóg groter geworden: niet alleen is het de test die vertelt of de bewegingswetten van Newton gebruikt mogen worden, het is óók de test die bepaalt of je de Speciale Relativiteitstheorie of de Algemene Relativiteitstheorie moet kiezen.
Tenslotte is er nog een grote verrassing die we nog niet hebben besproken, maar die de link tussen Eerste Wet en Relativiteitstheorie nog véél sterker maakt: in lesbrief 3 zal ik laten zien dat je de gehele Speciale Relativiteitstheorie uit de Eerste Wet van Newton kan afleiden!

[6] Soms hoor je wel eens dat de Speciale Relativiteitstheorie alleen maar geldt wanneer je naar dingen kijkt die met constante snelheid bewegen, en dat als ze versnellen de Algemene Relativiteitstheorie nodig zou zijn. Dat is onjuist. Versnelling kan prima door de Speciale Relativiteitstheorie worden beschreven, en dan niet bij benadering maar exact. Gelukkig maar, anders zouden ze bij de deeltjesversneller CERN een stuk moeilijkere berekeningen moeten doen!

2

Lesbrief 2: Relativiteitstheorie en elektromagnetisme

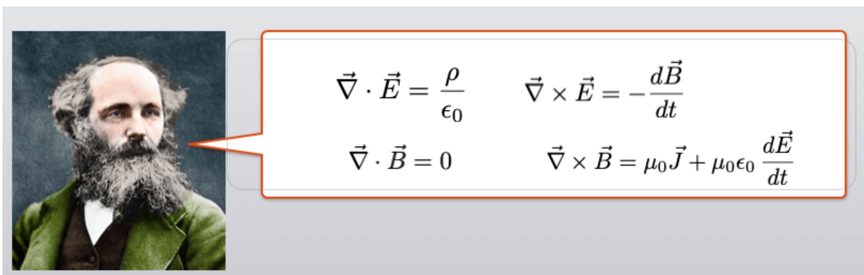
2.1 Introductie

In de vorige Lesbrief liet ik zien hoe belangrijk het is om goed te weten wat inertiaalstelsels zijn, niet alleen voor de Wetten van Newton, maar ook voor de opbouw van de Relativiteitstheorie. In volgende Lesbrieven werken we het begrip inertiaalstelsels verder uit en vinden we daaruit de Speciale en de Algemene Relativiteitstheorie. In de schoolboeken zien we vaak een andere aanpak terug voor de afleiding van die eerste. Daar wordt vaak eerst verteld dat Albert Einstein twee postulaten introduceerde, twee aannames die als soort grondwet in de natuur ingebouwd zijn, en daaruit tot zijn Speciale Relativiteitstheorie is gekomen. Maar, Einstein baseerde zijn inzichten op meer dan alleen aannames. Hij liet zich leiden door de regels van elektriciteit en magnetisme, die op het begin van de 20e eeuw nog maar nét bekend waren.

Daarom ga ik in deze Lesbrief door de geschiedenis van de ontdekking van Speciale Relativiteitstheorie heen. En wat een prachtige geschiedenis is dat geweest! Maxwell en Einstein koppelde elektriciteit, magnetisme, beweging, intertiaalstelsels, licht, en tijd en ruimte aan elkaar. Ik begin met de Wetten van Maxwell, en laat zien hoe deze leiden tot de postulaten van Einstein en leid ik daar de bekende formule voor tijdrek uit af. In de volgende Lesbrief laat ik zien dat we dit alles ook kunnen concluderen zónder Einsteins postulaten.

2.2 De Wetten van Maxwell

Laten we beginnen met even de fundamenten van elektromagnetisme te herhalen. Hoewel de regels van lichtstralen al een paar eeuwen bekend waren (lenzen, geometrische optica, Wet van Snellius, en zo), was de onderliggende verklaring van licht pas in de 19e eeuw gevonden. Na een hele reeks experimenten van mensen als Faraday, Franklin, en Oersted, werden de regels van elektriciteit en magnetisme steeds duidelijker. Uiteindelijk leidde deze tot deze beroemde vier formules, de Wetten van Maxwell. James Clerk Maxwell was degene die al die experimentele bevinden tot één wiskundig bouwwerk wist om te toveren.



Wat zeggen deze vier wetten? Het helpt dan om eerst even de symbolen te leren kennen. $\vec{E}$ en $\vec{B}$ staan voor de hoeveelheid en richting van het elektrische veld en het magnetische veld. ρ is de hoeveelheid lading per kubieke meter, en $\vec{J}$ is hoeveel lading er per kubieke meter aan het stromen is en in welke richting. En dan zijn er nog de symbooltjes die zeggen hoe erg de velden aan het veranderen zijn: d/dt is de tijdsafgeleide, die zegt hoe erg een veld verandert van de een op de volgende seconde, en het symbooltje ∇ is de (drie-dimensionale) ruimte-afgeleide, die zegt hoe erg een veld verandert van de ene naar de volgende locatie. Deze ruimte-afgeleide komt op twee manieren[1] voor in de Wetten van Maxwell. $\nabla \cdot \vec{E}$ zegt hoe erg het elektrisch veld 'straalt': hoe veel veldlijnen steken er *uit* de bron. $\nabla \times \vec{E}$ zegt hoe erg het elektrisch veld 'draait': hoe de veldlijnen gekromd zijn *rond* de bron.
Al met al een ingewikkeld stel formules dus, die Wetten van Maxwell. Ze zeggen hoe elektrische en magnetische velden stralen en draaien door de drie-dimensionale ruimte, en hoe die veranderen in de tijd. De symbooltjes ϵ_0 en μ_0 zijn getalletjes die zeggen hoe makkelijk elektrische en magnetische velden door het vacuüm bewegen. Die moeten experimenteel worden gemeten.

Laten we kijken wat elk van de Vier Wetten zeggen. Wel, de Eerste

[1] Voor wie het preciezer wil weten:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz},$$

en

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} \\ \frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} \\ \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} \end{pmatrix}.$$

De eerste heet de *divergentie* en zegt hoeveel veld er netto uit de bron steekt, en de tweede heet de *rotatie* en zegt hoe gekromd het veld is. Divergentie is een getal, rotatie is getal én een richting (je kan namelijk op meer dan één manier door de ruimte draaien.)

Wet, linksboven, zegt dat het elektrisch veld bepaald wordt door de hoeveelheid ladingsdichtheid. De Tweede Wet, linksbeneden, doet hetzelfde voor het magnetisch veld, en zegt dat deze *netto* nul is: blijkbaar steken er even veel veldlijnen in als uit de bron. Mooier gezegd: magnetische veldlijnen zijn gesloten. De Derde, rechtsboven, en Vierde Wet, rechtsbeneden, zeggen dat elektrische en magnetische velden in elkaar over kunnen gaan. Zo zegt de Derde dat als je een magnetisch veld wiebelt (dat is de rechterkant), dan krijg je er een elektrisch veld voor terug (de linkerkant). De Vierde zegt het omgekeerde: het wiebelen van een elektrisch veld (de rechterkant) levert een magnetisch veld op (de linkerkant), en dat het ook kan met een stroom $\vec{J}$. Elektrische en magnetische velden zijn daarom aan elkaar gekoppeld, tot één gezamenlijk ding: het *elektromagnetisch veld*.
Wie goed kijkt ziet dat de Wetten van Maxwell ook tijd en ruimte aan elkaar koppelen: wiebelen van een veld in de tijd (de tijdsafgeleide d/dt), levert het andere veld in de ruimte (de ruimteafgeleide ∇) op. Dit leidde Albert Einstein tot de Relativiteitstheorie.

2.3 Electromagnetische golven

Toen Maxwell zijn formules compleet had, kon hij zichzelf de volgende vraag stellen: wat nu als ik een magneet neem en die door de ruimte heen en weer wiebel? Dan zegt de Derde Wet dat je er een elektrisch veld voor terugkrijg. Maar als dat elektrische veld vervolgens ook wiebelt, dan krijg je er van de Vierde Wet een magnetisch veld voor terug. Maar dát wiebelende veld geeft je weer een elektrisch veld. En dát weer een magnetisch veld. Enzovoort enzovoort. Dat wiebelen, heen en terug en heen en terug tussen de twee soorten velden, hoe gedraagt zich dat dan? En blijven die velden op één plek, of beweegt zich dat door de ruimte heen, als een golfbeweging door een strakgespannen elastiek? Dat bleek precies zo te zijn!
Door even wiskundig te goochelen[2] met de Wetten van Maxwell in vacuüm, leidt dan snel tot een formule die zegt hoe het wiebelende elektrische veld zich gedraagt. Dat levert deze formule op:

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{d^2E}{dz^2} = 0 \tag{2.1}$$

(Voor magnetische velden geldt dezelfde formule.)
Dit is een bekende formule uit de natuurkunde: hij heet de *golfvergelijking*, omdat hij zegt dat het elektrisch veld een golf is. Kijk maar, als we $E(z,t) = \sin(z - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}t)$ invullen, lost dit precies de golfvergelijking op. Het elektrische veld oscilleert dus in de tijd, en in de ruimte. Dat de sinus van tijd en ruimte afhangt via $z - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}t$ zegt dat het een *lopende*

[2] Omdat het over Maxwell in vacuüm gaat, vul ik $\rho = 0$ en $\vec{J} = 0$ in. Voor het gemak bekijken we alleen even de x-richting ervan en we gaan ervan uit de de velden in z-richting bewegen. Dit betekent dat afgeleides naar x en y nul zijn. Dan zegt de Vierde Wet van Maxwell:

$$\frac{dB_z}{dy} - \frac{dB_y}{dz} = \epsilon_0\mu_0\frac{dE_x}{dt},$$

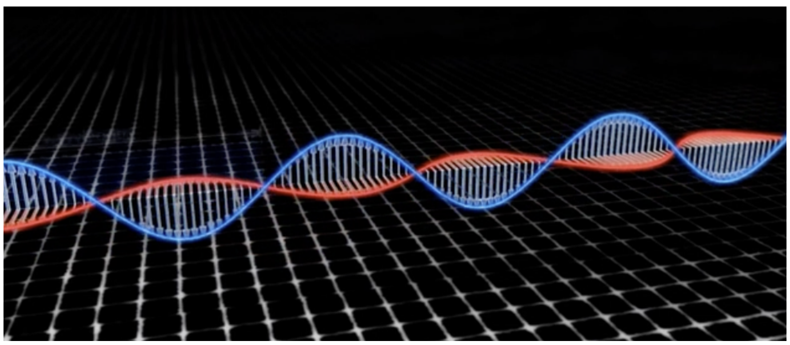
We nemen nu een tijdafgeleide aan beide kanten. De rechterkant wordt dan gewoon de tweede tijdafgeleide van het elektrisch veld, en in de linkerkant mogen we de plaatsafgeleide en tijdafgeleide omwisselen:

$$-\frac{d}{dz}\frac{dB_y}{dt} = \epsilon_0\mu_0\frac{d^2E_x}{dt^2}.$$

Nu pakken we de Derde Wet erbij, die zegt dat we de tijdsafgeleide van een magneetveld mogen vervangen door een plaatsafgeleide van het elektrisch veld. Netjes ingevuld (en met y-en x-afgeleides nul) geeft dit de golfvergelijking 2.1.

golf is in z-richting, met golfsnelheid $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Dat is niet zo gek: we zagen al dat ϵ_0 en μ_0 zeggen hoe makkelijk de velden door het vacuüm bewegen. Aangezien deze twee getalletjes meetbaar zijn, waren de waarden ervan bekend. En die snelheid bleek neer te komen op...... 300.000 km per seconde, het getalletje c! En laat dat nou precies de waarde zijn die men in de eeuwen daarvoor ook al gemeten had door naar lichtstralen te kijken. Maxwell schreef daarop deze onsterfelijke woorden[3], vrij vertaald: "ik heb ontdekt dat licht niks anders is dan golvende elektromagnetische velden."

[3] "We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena."



Voor ons, in de tegenwoordige tijd, is dat niet zo'n verrassing meer, maar voor Maxwell en zijn tijdgenoten was dat een enorme ontdekking! Elektriciteit is dat je een schok van de deurklink krijgt als je net de kat hebt geaaid, en magnetisme is dat sommige metalen elkaar graag aantrekken. Dat deze dingen ten eerste met elkáár te maken hebben, en ten tweede alle lichtverschijnselen verklaren, was een compleet wonder! Nobelprijzen bestonden nog niet in de 19e eeuw, maar anders had Maxwell die absoluut gekregen voor deze ontdekking.

2.4 Twee gekke verschijnselen

Goed, wiebelende elektromagnetische velden volgen dus uit de Wetten van Maxwell, en ook dat die reizen met de snelheid van het licht. Hier is het bijzondere: bij het afleiden van deze uitkomst, hoef ik niet aan te nemen *ten opzichte waarvan* dit licht reist. Dat is heel gek, want normaalgesproken moeten we, om beweging te beschrijven, een referentiestelsel aannemen. Het heeft het niet zo veel zin om te zeggen dat een auto met 100 km/h rijdt als we er niet bij zeggen dat dit ten opzichte van de weg is; ten opzichte van de zon is het een heel ander getalletje. Maar bij de afleiding van de elektromagnetische golven hoefde ik dit totaal niet te doen: die waarde van 1 gedeeld door ϵ_0 en μ_0, 300.000 km/s, volgde zojuist zonder ooit een referentiestelsel aan te hoeven nemen[4]!

Elektromagnetisme laat ook nog een andere bijzondere eigenschap zien: in elk referentiestelsel voorspellen de Wetten van Maxwell precies dezelfde uitkomst. Neem eens een lange keten van plusladingen, en neem een min-lading in de hand. Dan wordt je min-lading aangetrokken tot de draad, omdat er een elektrisch veld tussen de twee is. Maar, als ik nu voorbij kom lopen met constante snelheid en naar jouw elektron en de draad kijk, dan zie ik niet alleen een elektrisch veld, maar óók een magnetisch veld. Vanuit mijn inertiaalstelsel bezien, is jouw elektron namelijk een stroompje $\vec{J}$ geworden, en volgens de Wetten van Maxwell zou er dan ook een magnetische aantrekking moeten zijn. Vanuit jouw, en mijn inertiaalstelsels bezien verschillen we dus van mening over hoeveel elektrisch en magnetisch veld er is tussen draad en elektron. En tóch is er geen verschil: de Wetten van Maxwell zitten zó in elkaar, dat we wel verschillen van mening over hoeveelheid en type van velden, maar de totale aantrekkingskracht tussen draad en elektron precies hetzelfde is. Het is alsof elektrische en magnetische velden samenspannen om jou altijd dezelfde uitkomsten te geven.

Einstein, die goed de Wetten van Maxwell had bestudeerd, deed daarom de uitspraak dat, hoe gek ook, dit blijkbaar eigenschappen zijn van de natuur: de lichtsnelheid is de enige snelheid die in elk referentiestelsel dezelfde waarde heeft, en elk inertiaalstelsel levert dezelfde natuurkunde op, en schreef er zijn beroemde artikel uit 1905 over. Hij gooide de ether overboord en verklaarde domweg dat als de lichtsnelheid in alle inertiaalstelsels hetzelfde was, alle inertiaalstelsels ook gelijkwaardig zijn. Maxwell's vergelijkingen zijn dan noodzakelijk in alle stelsels hetzelfde.
Hij had hier geen meting voor nodig. Geen wonder dat zijn artikel uit 1905 deze titel heeft: "On the electrodynamics of moving bodies".
Deze twee conclusies van Einstein noemen we tegenwoordig zijn twee *postulaten*: het eerste heet het *Principe van Relativiteit*: elk inertiaalstelsel levert dezelfde natuurwetten op, en het *Principe van de lichtsnelheid*: in elk inertiaalstelsel beweegt licht met dezelfde snelheid.
Uit deze twee postulaten formuleerde hij de Speciale Relativiteitstheorie.

[4] Maxwell ging er trouwens van uit dat er wel degelijk een 'bijzonder' inertiaalstelsels was ten opzichte waarvan hij dacht dat hij zijn antwoorden afleidde: dit heette de *aether*. De lichtsnelheid die hij vond was voor hem dus de snelheid ten opzichte van deze aether. Hij had het verkeerd, want hij had niet door dat de Wetten van Maxwell in *alle* inertiaalstelsels correct zijn. Het was Einstein die dit inzicht had, en daar een postulaat van maakte.

We gebruiken het begrip 'aether' nog wel in spreektaal trouwens. Tv- en radiouitzendingen sturen we 'de ether in'.

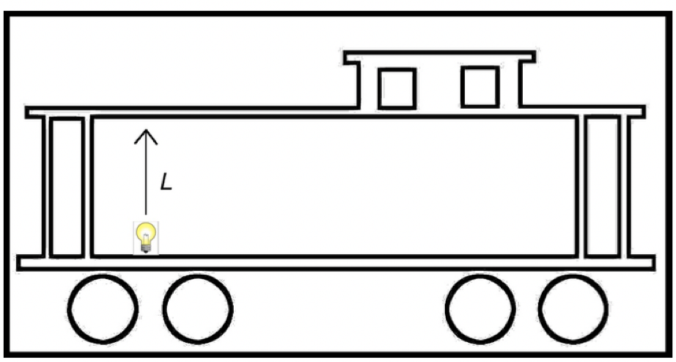
2.5 Speciale Relativiteitstheorie uit postulaten

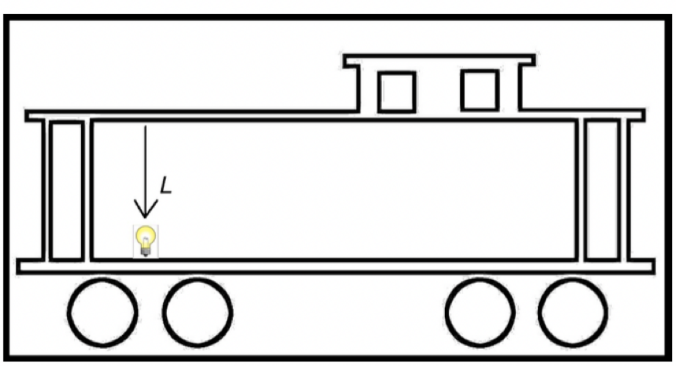
Het tweede postulaat, die over de lichtsnelheid, wordt in schoolboeken vaak gebruikt in gedachtenexperimenten om zo lengtekrimp en tijdrek af te leiden; in Lesbrief 3 zullen we zien dat deze afleiding onvolledig is en nogal voor wat misconcepten kan zorgen. Einstein zelf leidde zijn Relavititeitstheorie op een andere manier af uit zijn postulaten, zoals je kan lezen in zijn artikel uit 1905. Maar, de 'schoolboeken'-afleiding is wel makkelijk te volgen.

Laten we er eentje even voordoen, die van tijdrek. Of, *tijddilatatie*, zoals we dat in de natuurkunde formeel noemen. Dat wordt vaak met het volgende gedachtenexperiment gedaan: een treinwagon heeft een lampje op zijn vloer, en een spiegel aan het plafond. De lamp schiet een lichtpulsje weg, dat recht omhoog reist naar de spiegel, terugkaatst, en uiteindelijk weer bij het lampje aankomt. Hoeveel seconden duurt die rondreis? Wel, aan boord van de wagon duurt dat $2L$ gedeeld door de snelheid waarmee het licht reist, c. Dat geeft de formule[5] $\Delta\tau = 2L/c$.

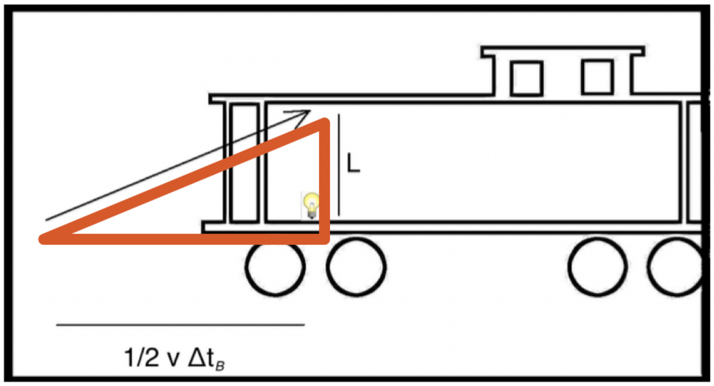
[5] In de Relativiteitstheorie geven we de tijdsduur voor een proces waarvan het begin en eind op dezelfde plek plaatsvindt (hier: wegschieten van lichtpulsje, aankomst van lichtpulsje) aan met de Griekse letter τ. De *proper time*, in mooi Engels jargon.

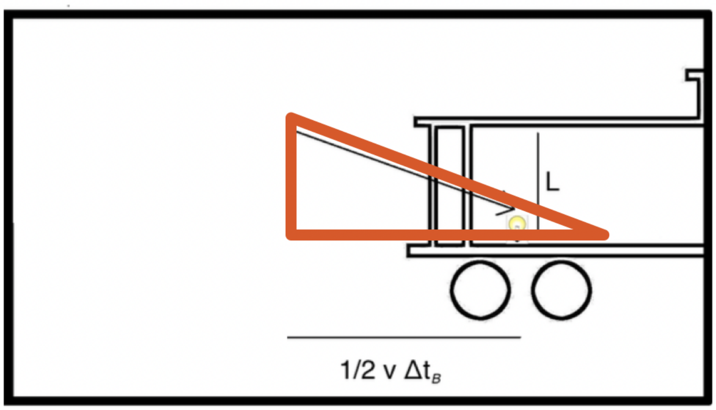
Trouwens, het is goed om hier alvast gewend te raken aan de Δ-notatie. Die betekent dat we kijken naar het *verschil* tussen twee tijdstippen, niet naar een enkel tijdstip zelf. Als ik vraag hoe laat het nu is, vraag ik naar t, maar als ik wil weten hoe lang het nog duurt voor de les is afgelopen, vraag ik naar Δt.
In de Relativiteitstheorie hebben we het alleen over Δt en Δx, tijdsduren en afstanden dus, *nooit* over tijdstippen t en locaties x.





Voor iemand op het station, die de trein voorbij ziet rijden, is deze tijdsduur anders. Voor hem, gaat het licht niet recht omhoog maar met een schuin pad, omdat tijdens de reis van de lichtstraal de trein en daarmee de spiegel aan het plafond, opzij beweegt.





Een schuin pad kost meer tijd om af te leggen dan recht omhoog, en als je dit netjes uitwerkt[6] zie je dat het een tijdsduur is van Δt, gegeven door deze formule:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{2L}{c} \tag{2.2}$$

Daarin herkennen we ook de uitdrukking voor $\Delta\tau$, dus zo kunnen we de tijd aan boord van de trein uitdrukken in de tijd vanaf het station. Dat levert de bekende formule op voor tijdrek:

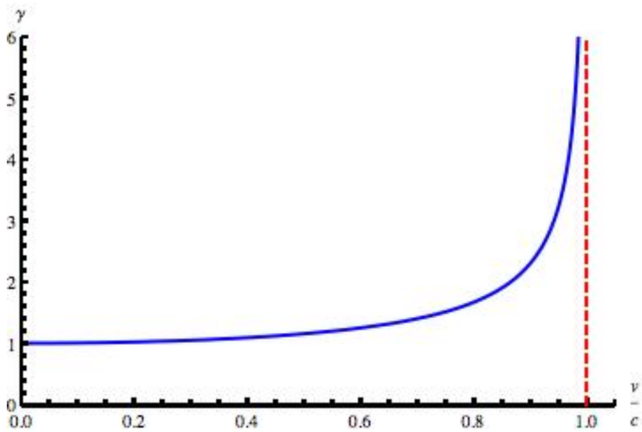
$$\Delta t = \gamma\, \Delta\tau. \tag{2.3}$$

[6] We kunnen de lengte van dit schuine pad uitrekenen met de Stelling van Pythagoras. Laten we de reistijd van lamp naar spiegel $\Delta t/2$ noemen, omdat het de halve afstand is die het licht in totaal moet afleggen van lamp naar spiegel terug naar lamp. De verticale zijde is L, de horizontale zijde is hoe veel meter de trein vooruit is gereden terwijl het licht van lampje naar spiegel reist: $v \cdot \Delta t/2$, waarin v de snelheid is van de trein. De afgelegde afstand is dan $\sqrt{L^2 + (v \cdot \Delta t/2)^2}$. Deel dit door c en we vinden de hoeveelheid tijd $\Delta t/2$:

$$\Delta t/2 = \frac{1}{c}\sqrt{L^2 + (v \cdot \Delta t/2)^2}.$$

De gewenste Δt staat aan beide zijden van deze vergelijking, en kan met de balansmethode eruit worden opgelost. Het antwoord is 2.2.

Die tijden zijn niet hetzelfde: ze verschillen met een factor γ, de *Lorentz-factor*, die is weergegeven in de figuur hier beneden.



De Lorentz-factor is vrijwel gelijk aan 1 wanneer de snelheid v tussen trein en station klein is vergeleken met de lichtsnelheid, maar begint flink anders te worden wanneer v richting de lichtsnelheid c komt. Oftewel, wanneer twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben van dichtbij de lichtsnelheid c, lopen hun tijden flink uiteen. Dat is tijdrek. Als de twee waarnemers ten opzichte van elkaar met (bijna) de lichtsnelheid bewegen, wordt de Lorentz-factor zelfs (bijna) oneindig groot. Dat betekent dat waar de ene waarnemer zegt dat er, zeg, 5 seconden voorbij gaat om een proces te zien, dat voor de ander veel meer seconden duurt. Voor die tweede waarnemer is het dus alsof dat proces veel langzamer verloopt. Tijd remt af bij hoge snelheid.

En zo voort. Ook formules voor lengtekrimp (*Lorentz-contractie* in mooi jargon) en de algehele formules[7] tussen tijd en ruimte kunnen met zulke gedachtenexperimenten worden afgeleid. Voor wie wil zien hoe Einstein het zélf deed, verwijs ik naar zijn artikel, waarin hij tot deze formules kwam met enkel en alleen de wiskunde van de Wetten van Maxwell. Te moeilijk voor een les op de middelbare school, daarom zijn de gedachtenexperimenten een goed alternatief: lekker duidelijk, makkelijke wiskunde, en overal te vinden!

[7] Tijdrek en lengtekrimp zijn speciale gevallen van de totale formules waarmee je tijd en ruimte in een inertiaalstelsel A kan omrekenen in die van een ander inertiaalstelsel B. Deze heten de *Lorentz-transformaties*, en zijn

$$\begin{aligned} \Delta t_B &= \gamma \left(\Delta t_A - \frac{v}{c^2} \Delta x_A \right), \\ \Delta x_B &= \gamma \left(\Delta x_A - v \Delta t_A \right). \end{aligned}$$

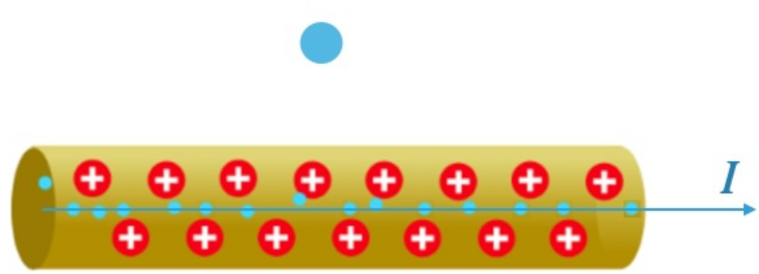
Wat voegt dit toe aan de normale formule voor tijdrek?. Wel, die laatste geldt alleen wanneer een klok stilstaat in Stelsel A. Kijk maar: dan is $\Delta x_A = 0$, en dat ingevuld in de Lorentz-transformaties geeft je netjes de formule voor tijdrek. Maar je kan natuurlijk ook een klok hebben die zowel in A als B aan het bewegen is.
Ook zegt de Lorentz-transformaties een nieuw effect: *verlies van gelijktijdigheid*. Als twee dingen tegelijk plaatsvinden in Stelsel A, $\Delta t_A = 0$ dus, zie je dat $\Delta t_B \neq 0$. Wat tegelijkertijd gebeurt in het ene inertiaalstelsel, doet dat niet in het ander.

2.6 Magnetisme is gewoon lengtekrimp

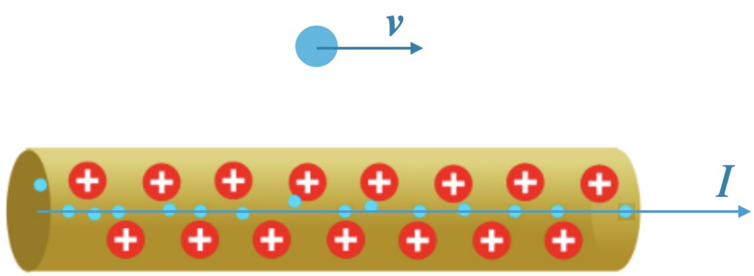
Uit alles wat we gezien hebben, kunnen we nu een leuk voorbeeld behandelen dat laat zien dat Speciale Relativiteitstheorie niet alleen maar optreedt bij hoge snelheid. Dat zou een leerling het idee kunnen geven dat je er in de dagelijkse praktijk niks van kan merken. Dat is niet het geval: er is een alledaags verschijnsel dat pure relativiteitstheorie is. Magnetisme blijkt niks anders te zijn dan een elektrisch veld met lengtekrimp.

Beneden heb ik een koperdraad getekend. De protonen (in het rood) van het koper zitten netjes gerangschikt in een rooster, en de elektronen (in het blauw) bewegen vrijelijk tussen en langs de protonen. Er zijn net zoveel protonen als elektronen, dus de draad is elektrisch neutraal. We brengen een stroom aan: door een potentiaalverschil worden de elektronen[8] aan het bewegen gebracht. Een geladen deeltje, bijvoorbeeld een ander elektron, buiten de draad voelt een hele hoop elektrische velden, uitgezonden door elk van de deeltjes in de draad. De optelsom van al deze velden is netjes nul. Het deeltje buiten de draad voelt daarom geen enkele kracht naar de draad toe of van de draad af, en blijft stil staan.

[8] De protonen zitten té stevig vast in hun rooster om te gaan stromen. Bovendien zijn protonen 1836 keer zwaarder dan elektronen, dus die komen niet zo snel in beweging.



Ok, tot zover. Nu geven we het externe deeltje een duw zodat het langs de draad beweegt. De *hoeveelheid* protonen en elektronen in de draad verandert daardoor niet. Maar de *sterkte van het elektrisch veld* verandert daarentegen wél. Hoe kan dat, als er niet meer of minder geladen deeltjes in de draad zitten dan toen er nog geen stroom was? Het antwoord is: Relativiteitstheorie! Gezien van het inertiaalstelsel van het externe deeltje heeft de stroom elektronen in de draad lengtekrimp. De protonen óók, maar een andere hoeveelheid dat de elektronen, omdat het de snelheid tussen de protonen in de draad en het externe deeltje niet hetzelfde getalletje is als de snelheid tussen de elektronen in de draad en het externe deeltje. Nu zegt de Eerste Wet van Maxwell dat de hoeveelheid elektrisch veld $\vec{E}$ gegeven wordt door de ladings*dichtheid*: hoeveel ladingen per kubieke meter. Hetzelfde aantal deeltjes zit nu door die lengtekrimp in een kleiner volume waardoor er een hogere dichtheid ρ is, en dus voorspelt de Eerste Wet van Maxwell een groter elektrisch veld. De protonen in de draad hebben een andere waarde voor de lengtekrimp dan de elektonen, en de optelsom van de elektrische velden van de elektronen en protonen is niet meer nul!



Er blijft daarom een netto elektrisch veld over, en dat duwt tegen of trekt aan het externe deeltje. Opeens zal dat externe deeltje nu weggeduwd of aangetrokken worden van de draad, loodrecht op de bewegingsrichting van de stroom. Die hoeveelheid kracht is afhankelijk van de snelheid van de deeltjes in de draad, de stroom dus, want deze v bepaalt de grootte van de lengtekrimp. Al met al, zorgt de lengtekrimp voor een extra kracht die loodrecht staat op de draad en groter wordt bij hogere stroomsterkte. Die noemen wij de magnetische kracht. Het magnetisch veld is dus niks anders dan een elektrisch veld dat Lorentz-contractie heeft gevoeld. Geen wonder dus dat de magnetische kracht ook wel de *Lorentz-kracht* heet. Magnetisme is relativiteitstheorie!

3
Lesbrief 3: Relativiteitstheorie uit de Wetten van Newton

3.1 Introductie

Wat we in de laatste Lesbrief hebben gezien is wat ik graag de 'schoolboek'-afleiding van de Speciale Relativiteitstheorie noem: aannemen dat licht voor iedere waarnemer met dezelfde snelheid gaat, en dan met wat gedachtenexperimenten tot de formules komen voor tijdrek en lengtekrimp.
Deze afleiding heeft zo zijn aantrekkingskracht: eenvoudig te volgen, gemakkelijk te visualiseren, en de wiskunde is ook niet zo moeilijk. Ideaal dus om uit te leggen in een klaslokaal! Maar bij nader inzien kloppen er een aantal dingen niet helemaal, en dit zou zelfs kunnen leiden tot misvattingen bij de leerlingen, en soms zelfs bij de leraren!

Want waarom is licht eigenlijk zo belangrijk bij die afleiding? Relativiteitstheorie geldt toch óók voor andere verschijnselen dan licht? Sterker nog, de Relativiteitstheorie geldt in de hele natuurkunde. Uiteindelijk is relativiteit een theorie over ruimte en tijd, niet over wat er in ruimte en tijd beweegt (of dat nu licht is of wat anders). We kunnen daarom verwachten dat Speciale Relativiteitstheorie kan worden afgeleid zonder licht te gebruiken. Hoog tijd dus om een afleiding te laten zien waarin elektromagnetisme geen enkele rol speelt. Maar we zullen wel érgens moeten beginnen. Verrassend genoeg, blijkt dat de Eerste Wet van Newton te zijn.

3.2 Drie misconcepten uit de licht-afleiding

Laten we even terugkeren naar de afleiding die we vaak in de lessen terugzien: de aanname doen dat licht voor iedere waarnemer met dezelfde snelheid gaat, en dan met wat gedachtenexperimenten tot de formules komen voor tijdrek en lengtekrimp.

Een scherpzinnige leerling kan moeite hebben met het accepteren van deze formules. We hebben de afleiding immers gedaan door heel specifieke gedachte-experimenten te doen en vervolgens te claimen dat de uitkomsten ook in alle andere gevallen waar zijn. Het is alsof je de Stelling van Pythagoras bewijst door te laten zien dat deze geldt voor één specifieke driehoek (een met zijden 3, 4 en 5 doet dat prima) en vervolgens te beweren dat deze dan ook wel voor alle andere driehoeken waar zal zijn. Dat is inderdaad wel zo, maar *aangetoond* is het zo niet: je mag geen stelling bewijzen door naar één enkel voorbeeld te wijzen. Zo ook bij de afleiding van tijdrek: we hebben één voorbeeld genomen (een lichtstraal in een trein) en de resultaten ervan gepromoveerd tot algemene geldigheid. Dat is slechte logica!

Een tweede vraag die een scherpzinnige leerling zou kunnen stellen is: rekt de tijd écht uit als ik naar een bewegende klok kijk, of duurt het gewoon een tijdje voordat ik de klok *zie* omdat het licht van de klok naar mijn oog moet reizen? Een goede vraag, want in de 'schoolboekenuitleg' maken we duidelijk gebruik van die reistijd van licht: we hebben expliciet een gedachte-experiment gedaan waarin licht van de ene kant van een treinwagon naar de andere moet bewegen. Een leerling zou dus tot de conclusie kunnen komen dat de relativiteitstheorie het gevolg is van de reistijd van licht, dus dat een en ander er

gek uitziet omdat het even duurt voor lichtsignaal van bron bij ons oog aankomt maar er eigenlijk niks geks met lengtes en tijdsduren aan de hand is. En dat is verkeerd.
Ten slotte wekt de lichtstralen-uitleg de indruk dat de Speciale Relativiteitstheorie alleen geldt als dingen met constante snelheid bewegen. Maar dat klopt niet: de Speciale Relativiteitstheorie geldt prima voor massa's die versnellen. Nee, de Speciale Relativiteitstheorie geldt wanneer een waarnemer zich in een inertiaalstelsel bevindt. Dit hadden we al gezien in Lesbrief 1 als één van de redenen waarom de Eerste Wet van Newton zo belangrijk is omdat we anders geen inertiaalstelsels kunnen identificeren. Pas als het waarnemersstelsel een niet-inertiaalstelsel is, is de Algemene Relativiteitstheorie nodig. Maar niets van dit alles blijkt duidelijk uit de lichtstralen-afleiding[1].

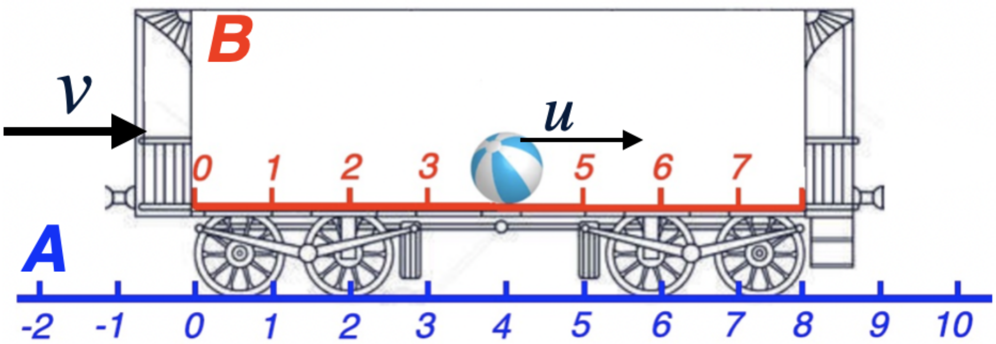
[1] Het zit er overigens wél in. Namelijk in het gebruiken van de Wetten van Maxwell, want die gelden alleen in inertiaalstelsels. Elke conclusie die eruit volgt daarom óók, inclusief de Postulaten van Einstein en daarmee zijn Speciale Reltativiteitstheorie.

Ik denk dus dat het een didactisch nut heeft om een afleiding van de Speciale Relativiteitstheorie te doen waarin helemaal geen licht wordt gebruikt. Geen gedachte-experimenten, geen stellingen over de lichtsnelheid, zelfs niet dat licht bestaat! Het voordeel van zo'n afleiding is dat de regels die we dan vinden, voor álle natuurkunde op zullen gaan. Het stapje dat we daarna makkelijk kunnen maken, is dat de Speciale Relativiteitstheorie een eigenschap is van tijd en ruimte zélf. De prijs die we ervoor moeten betalen is dat de afleiding wel abstracter zal worden. Niet moeilijker (je zal dadelijk zien dat ik alleen maar makkelijke wiskunde hoef te gebruiken), maar voor sommige leerlingen is het een beetje gek om tot nieuwe natuurwetten en formules te komen zonder een experiment te hoeven doen!

3.3 De Speciale Relativiteitstheorie, afgeleid uit de Eerste Wet van Newton

Laten we beginnen. We nemen twee inertiaalstelsels, A en B, zoals in het plaatje beneden. Omdat het allebei inertiaalstelsels zijn, moet de snelheid v tussen de stelsels noodzakelijkerwijs constant zijn.

We nemen een massa (ik heb er maar weer eens een bal van gemaakt), en we laten hem met een bepaalde snelheid u bewegen. Die snelheid is niet hetzelfde in beide stelsels, en ik geef die daarom een labeltje mee: gezien vanuit stelsel A heeft de bal een snelheid u_A, en vanuit stelsel B een snelheid u_B. Natuurlijk is het ook zo dat afstand in de twee stelsels niet hetzelfde is, en we geven die daarom ook dat labeltje mee: Δx_A en Δx_B. Tenslotte zullen we ook nog aannemen dat tijdsduur Δt in de twee stelsels wel eens verschillend kan zijn, dus ook die geven we die labeltjes mee: Δt_A en Δt_B.



Overigens neem ik niet per sé aan dat die tijdsduren anders zijn, hoor; misschien is er tijdrek ($\Delta t_A \neq \Delta t_B$), misschien niet ($\Delta t_A = \Delta t_B$). Dat is precies waar we achter hopen te komen.

Vraag: als we de afstand Δx_A kennen die de bal in het A-systeem heeft afgelegd, kunnen we dan berekenen wat de afstand Δx_B is zoals gezien in het B-systeem? En als we weten hoeveel seconden Δt_A dit in systeem A duurde, kunnen we dan berekenen hoeveel seconden Δt_B dit in systeem B duurde? Dat wil zeggen: wat zijn de formules waarmee we afstanden en tijdsduren uit het A-systeem kunnen omrekenen naar die in het B-systeem?
Wel, Δx en Δt in B kunnen hoogstens afhangen van Δx en Δt in A *tot de eerste macht*. Hogere machten kunnen niet, want anders breken we de Eerste Wet van Newton. Kijk maar: als de machten hoger zouden zijn dan de eerste, zouden hun afgeleiden (de snelheden u_A en u_B dus) niet-constant zijn. Maar als op de bal geen netto krachten werkenf en A en B inertiaalstelsels zijn, moet hij in beide systemen met constante snelheid bewegen[2]. De Eerste Wet van Newton vertelt ons dus, dat de omrekenformules er zo uit moeten zien:

[2] De *waarde* van die snelheid is verschillend in de twee stelsels, maar dát het in beide constant is, staat buiten kijf.

$$\Delta x_B = \beta \Delta x_A + \sigma \Delta t_A \tag{3.1}$$
$$\Delta t_B = \gamma \Delta t_A + \kappa \Delta x_A. \tag{3.2}$$

Merk op dat er hier vier onbekenden zijn: γ, κ, β, en σ. We weten nog niet wat ze zijn. Misschien is $\gamma = 1$ en is $\kappa = 0$. In dat geval is de hoeveelheid tijd hetzelfde in beide inertiaalstelsels en krijgen we de Newtoniaanse regels terug, zonder tijdrek. Maar, misschien hebben ze andere waarden. Hoe kunnen we daar achter komen?

Uit de wiskunde weten we dat als je vier onbekenden hebt, je vier voorwaarden nodig hebt om hun waarden te vinden. We kunnen deze gemakkelijk verkrijgen, uit het postulaat van Einstein dat alle inertiaalstelsels even geldig zijn.

3.4 Vier constanten opgelost uit vier speciale situaties

Het is het makkelijkst om deze opgave te doen door eerst een formule te vinden waarmee de snelheid van de bal in het A-stelsel omgeschreven kan worden naar die in het B-stelsel. Dat is een eenvoudig sommetje: snelheid is niks anders dan de afgelegde afstand gedeeld door de tijdsduur. Door de twee formules van 3.2 op elkaar te delen vinden we meteen

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \\ &= \frac{\beta\,\Delta x_A + \sigma\,\Delta t_A}{\gamma\,\Delta t_A + \kappa\,\Delta x_A} \end{aligned} \tag{3.3}$$

en als we ook nog Δt_A wegdelen, herkennen we in de breuk de snelheid $u_A = \Delta x_A / \Delta t_A$ van de bal in het A-stelsel:

$$u_B = \frac{\beta\,u_A + \sigma}{\gamma + \kappa\,u_A}. \tag{3.4}$$

Hiermee is een *snelheidsomrekenformule* gevonden: als we de snelheid van de bal weten in stelsel A, dan berekenen we hiermee de snelheid van de bal in stelsel B [3].

Hiermee kunnen we aan de slag om twee van de vier constanten te vinden! Zoals we al zagen, hoeven we alleen vier speciale situaties te bekijken. Om deze Lesbrief niet te lang te maken doe ik er hier drie in detail voor; de laatste van de vier is uitgewerkt op een website waar ik naar zal verwijzen.

[3] Zie je trouwens dat je niet hoeft aan te nemen dat de bal met constante snelheid beweegt? Hetzelfde is waar voor alles wat zal volgen in deze afleiding. Zo kun je heel precies zien wat ik in Lesbrief 1 al zei, dat de Speciale Relativiteitstheorie helemaal niet alleen voor bekijken van constante snelheden waar is.

Hier is zo'n speciale situatie.

Stel dat we de bal in Stelsel B stil laten staan. Dan zal de bal in Systeem A een snelheid v hebben. We weten dus dat als $u_B = 0$, dan $u_A = v$. Dat kunnen we in onze snelheidstransformatieformule invullen en zien we dat die gelijk moet zijn aan nul. En breuken, die zijn nul als hun teller dat is. We vinden daarom meteen dat β en σ aan elkaar vast moeten zitten:

$$\sigma = -v\,\beta. \tag{3.5}$$

Geweldig! Het betekent dat als we β weten, de waarde van σ óók bekend is. Eigenlijk hebben we daarom niet vier onbekende constanten, maar slechts drie.

Laten we nog zo'n speciale situatie bekijken. Deze keer leggen we de bal stil in Systeem A. Dan zal de bal in Systeem B een snelheid $-v$ hebben. We weten dus dat als $u_A = 0$, dan is $u_B = -v$. Dit ingevuld in de snelheidstransformatieformule geeft ons dat de constanten σ en γ aan elkaar vast zitten:

$$\sigma = -v\,\gamma. \tag{3.6}$$

Mooi! Als we γ weten, dan weten we σ óók. Trouwens, als we de twee laatste uitkomsten met elkaar vergelijken we zien ook meteen al dat $\gamma = \beta$. Dat betekent dat we nóg een constante minder hebben. In plaats van de vier oorspronkelijke, hoeven we alleen nog maar γ en κ te bepalen.

Hier is de derde speciale situatie. Via onze transformaties 3.2 kunnen we alles uit systeem A omschrijven naar systeem B. Wat als we de coördinaten van de bal omschrijven van systeem A naar systeem B, en meteen daaropvolgend een die uitkomsten weer terug omschrijven van Systeem B naar Systeem A? Dan moet daar precies hetzelfde uitkomen als wanneer we gewoon in systeem A waren blijven zitten. In wiskunde uitgedrukt[4] levert dat een derde formule op waarmee de vier constanten aan elkaar vastzitten:

$$\gamma^2 - \kappa\sigma = 1. \tag{3.7}$$

En σ, die hadden we al gezien als $\sigma = -v\,\gamma$. Om γ te vinden, hoeven we dus alleen nog maar κ te weten. Als we κ kunnen vinden weten we alles!

De laatste speciale situatie is wanneer we een derde inertiaalstelsel erbij nemen: systeem C. Wat nu als we onze transformatieformules gebruiken om de tijdsduren en afstanden uit systeem A omschrijven naar die in Systeem B, en vervolgens de transformatieformules nóg eens gebruiken om de tijdsduren en afstanden om te schrijven naar die in Systeem C? Die totale uitkomst moet dan wel hetzelfde resultaat opleveren als dat we maar één transformatie hadden uitgevoerd: in één keer van systeem A naar systeem C. Eigenlijk passen we hier het Principe van Relativiteit toe: door te stellen dat twee manieren om van A naar C te transformeren allebei mogen, gebruiken we de gelijkwaardigheid van inertiaalstelsels. In wiskunde uitgedrukt, knoopt[5] deze speciale situatie de constanten voor een vierde keer en laatste keer aan elkaar:

$$\kappa = -\frac{1}{c^2}\,\gamma\,v. \tag{3.8}$$

[4] De omgekeerde transformaties, van Stelsel B naar Stelsel A, zijn

$$\Delta t_A = \frac{1}{\beta\gamma - \kappa\sigma}\left(\beta\,\Delta t_B - \kappa\,\Delta x_B\right)$$
$$\Delta x_A = \frac{1}{\beta\gamma - \kappa\sigma}\left(\gamma\,\Delta x_B - \sigma\,\Delta t_B\right).$$

Met $\gamma = \beta$ zien we al dat $\gamma^2 - \kappa\sigma$ niet nul mag zijn.
Maar welke waarde heeft deze wel? Dat kunnen we zien als we naar het speciale geval kijken dat er geen snelheid is tussen Stelsel A en Stelsel B, $v = 0$ dus. Dan weet ik dat ik $\Delta x_A = \Delta x_B$ zou moeten vinden. Als $v = 0$ dan is $\sigma = 0$, zie ik aan 3.5. De coordinaattransformatie 3.2 en zijn omgekeerde worden dan

$$\begin{aligned} \Delta x_B &= \gamma\,\Delta x_A \\ \Delta x_A &= \frac{1}{\gamma^2 - \kappa\sigma}\gamma\,\Delta x_B. \end{aligned}$$

De enige manier waarop dit netjes $\Delta x_A = \Delta x_B$ geeft, is wanneer $\gamma^2 - \kappa\sigma = 1$.

[5] De uitwerking voor deze speciale situatie is wat langer dan de vorige drie. Daarom doet onze website dit voor. De website doet dat in opdrachtjes, met uitwerking per stapje, en is prima geschikt voor leerlingen (en docenten!) om zelfstandig doorheen te werken. Ook de vorige drie situaties worden er in stapjes en opdrachtjes uitgewerkt. De website is:

www.meneercuperus.nl/SRT.html

Met dank aan Michiel Cuperus, die deze afleiding tot zo'n mooie website heeft gefabriekt!

Dit was het laatste waar we nog naar zochten! Met deze κ ingevuld in $\gamma^2 = 1 - v\gamma\kappa$ vinden we gratis en voor niks:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{3.9}$$

en hiermee, uit 3.5, 3.6, en 3.8, hebben we ook die andere constanten te pakken:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \kappa = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \sigma = \frac{-v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{3.10}$$

En daarmee zijn onze vier onbekenden gevonden! Het zal je trouwens opvallen dat er een nieuw getalletje in de formules staat: een c. Deze is uit de afleiding komen vallen[6]. Het is nu verleidelijk om te denken dat dat de lichtsnelheid wel zal zijn. En dat is het ook! Alleen hebben we die er niet *ingestopt*, maar is die er zelf uit komen rollen. Maar, goed om te bedenken dat de waarde van dit getalletje nog niet is bepaald, of dat die dezelfde waarde moet hebben voor alle waarnemers. Dat zullen we nu onderzoeken.

[6] Als je het gek vindt dat er 'uit het niks' opeens een constante bijgekomen is, bedenk dan dat dit heel normaal is in wiskundige afleidingen.
Los maar eens de Tweede Wet van Newton op voor een constante netto kracht F. Die zegt dat de tweede tijdsafgeleide van de plaats $x(t)$ gelijk is aan F/m, en wiskunde zegt dat de oplossing gegeven wordt door $x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0\,t + x_0$, met daarin twee constanten v_0 en x_0 die we er niet van tevoren in hadden gestopt.

3.5 Een speciale snelheid is nu gevonden!

Nu de vier constanten gevonden zijn, kunnen we ze terug invullen in de transformatieformules waarmee we begonnen waren. Die worden dan

$$\begin{aligned} \Delta t_B &= \gamma\left(\Delta t_A - \frac{v}{c^2}\,\Delta x_A\right), \\ \Delta x_B &= \gamma\,\left(\Delta x_A - v\,\Delta t_A\right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

waarin $\gamma = 1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

Dit is bijzonder! Het zijn namelijk precies de Lorentz-transformaties, die Einstein zelf afleidde in zijn beroemde artikel uit 1905, en die we in Lesbrief 2 ook al hadden gezien aan de hand van Einsteins postulaat over lichtsnelheid. Deze Lorentz-transformaties vatten de gehele Speciale Relativiteitstheorie samen, en bevatten, onder andere, tijdrek, lengtekrimp, en nog veel meer. Alleen, deze keer hebben we geen licht gebruikt, *alleen het begrip inertiaalstelsels*, waarvan de Eerste Wet van Newton zeggen dat die bestaan en hoe we die kunnen vinden. Dat is precies waarom de Speciale Relativiteitstheorie in alle inertiaalstelsels waar moet zijn, en voor álle natuurkunde die zich daarin afspeelt.

Nu die gekke constante c nog. De waarde daarvan kunnen we niet bepalen aan de hand van onze afleiding. Maar, we kunnen wél zien dat het een *snelheid* moet zijn. Kijk maar, we kunnen alleen getalletjes bij elkaar optellen als ze dezelfde eenheid hebben, en dan zien we meteen aan de formule voor γ dat c de eenheid van een snelheid moet hebben. Veel mooier nog, is dat we kunnen aantonen dat de snelheid c dezelfde waarde heeft in alle inertiaalstelsels. Dat zien we door de vier constanten in te vullen in de snelheidstransformatieformule. Die wordt dan:

$$u_B = \frac{u_A - v}{1 - \frac{u_A v}{c^2}}. \tag{3.12}$$

Stel nu dat we de bal een snelheid c geven in Stelsel A. Dan vertelt deze formule dat de bal ook in Stelsel B die snelheid c heeft[7]. Oftewel, we hebben nu gevonden dat c in elk inertiaalstelsel dezelfde waarde heeft! Wat bij Einsteins oorspronkelijk een postulaat was, blijkt dat een onnodige aanname. De Eerste Wet van Newton blijkt genoeg te zijn om tot deze conclusie te komen!

[7] Kijk maar: we vullen $u_A = c$ in, en vinden dan

$$u_B = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c\left(\frac{1 - v/c}{1 - v/c}\right) = c.$$

Oftewel: als iets in stelsel A met snelheid c beweegt, dan beweegt het ook in stelsel B met snelheid c.
De snelheid v tussen de twee inertiaalstelsels blijkt geheel onbelangrijk: die werd in de laatste stap weggedeeld en speelt dus geen rol in onze conclusie. Naar welk inertiaalstelsel je ook probeert te gaan, in *elk* zal c dezelfde waarde hebben.

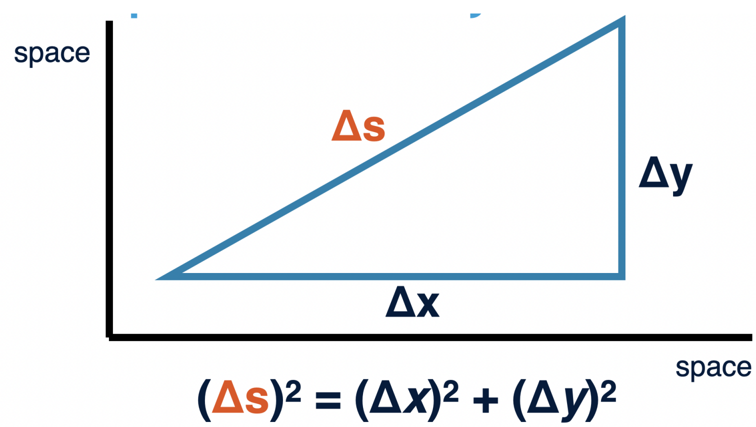
Blijft alleen nog de vraag over hoe we aan de getalswaarde van die speciale snelheid c komen. Zouden we dat kunnen doen zonder een lichtstraal op te meten? Zeker! Je zou bijvoorbeeld een stilstaande zandloper kunnen nemen, en opmeten hoe lang het duurt tot die leeggelopen is. Dat geeft ons[8] $\Delta\tau$, en daarna opmeten hoe lang Δt het leeglopen van de zandloper duurt als we de zandloper aan boord van een trein doen. Als we weten hoe snel v de trein beweegt, kunnen we de formule voor tijdrek invullen en terugrekenen wat de waarde is van c. En daar komt dan ons beroemde getalletje 300.000 km/s uit. Na ja, treinen rijden niet snel genoeg om deze meting erg praktisch te maken. Gelukkig geeft de natuur ons gratis en voor niks deeltjes die wél snel genoeg reizen om tijdrek aan te meten en daarmee c te bepalen. Muonen uit de atmosfeer, bijvoorbeeld.

[8] Herinner je uit Lesbrief 2 dat we $\Delta\tau$ gebruiken als we de tijdsduur bedoelen wanneer die gemeten wordt wanneer begin en eindpunt van een proces op dezelfde plek plaatsvindt; hier is dit de locatie van de zandloper.

3.6 Relativiteitstheorie als geometrie: Het Minkowski lijn-element

Met de Lorentz-transformaties 3.11 die we gevonden hebben, hebben we het hart van de Speciale Relativiteitstheorie in handen. En zoals we zagen zijn deze formules voor alle natuurkundige verschijnselen even waar, ook als er geen licht in voortkomt. Een andere manier om hetzelfde te zeggen, is dat deze formules eigenschappen zijn van tijd en ruimte zélf, niet van welk specifiek natuurkundig verschijnsel dan ook. We kunnen dit zelfs heel precies maken: we gaan onze formules omzetten in geometrie, in meetkunde! Niet alleen maakt dit heel duidelijk dat Speciale Relativiteitstheorie een *tijdruimte-theorie is*, maar zal ons dat in Lesbrief 5 helpen om de stap naar de Algemene Relativiteitstheorie te maken.

Laten we eerst even kijken naar een stukje geometrie uit de Newtoniaanse wereld. Teken een driehoek op een vlak papier, zoals in het plaatje beneden. Daarin geldt de Stelling van Pythagoras:



Als we de hoek van de driehoek aanpassen, verandert de lengte van de schuine zijde natuurlijk niet, maar wat er wél verandert is de lengte van de andere twee zijden. Interessant: door de hoek groter te maken, wordt Δx kleiner en tegelijkertijd wordt Δy groter, en dan precies zódanig dat hun combinatie nog steeds dezelfde schuine zijde oplevert. Niet zo gek ook, het is een eigenschap van de ruimte dat afstanden niet af kunnen hangen van waar we de x-as en y-as neerleggen. Zet een leerling in het midden van een lokaal, en vraag naar het aantal meter tot aan de prullenbak in de hoek. Daarna draait de leerling om haar as, zodat de prullenbak vanuit haar oogpunt nu op een andere plek staat. Maar de afstand tot de prullenbak is er niet door veranderd.

Tot zover de Newtoniaanse wereld. Terug naar de Speciale Relativiteitstheorie! Mijn claim is nu, dat er ook dan een driehoek bestaat waarvan de schuine zijde altijd dezelfde waarde heeft. Maar, deze keer voldoet die driehoek aan een iets andere versie van de Stelling van Pythagoras. In plaats van de *som* van kwadraten, tellen we het *verschil* van kwadraten[9] bij elkaar op:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2. \tag{3.13}$$

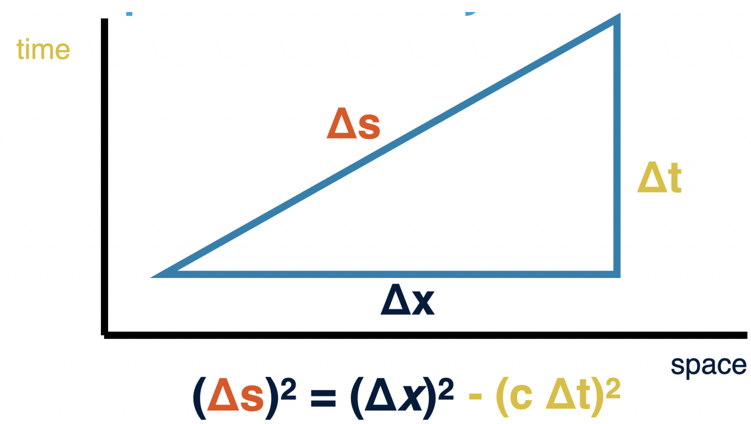
Deze 'Stelling van Pythagoras' geeft een bijzondere versie van een driehoek. Ten eerste staat er langs de ene zijde een afstand en langs de

[9] Ik heb hier alleen afstand in x-richting meegenomen, en niet in y- of z-richting. Dat doe ik omdat ik ervan uit ga dat twee inertiaalstelsels in x-richting bewegen ten opzichte van elkaar.
Daarbij, als ik de zijden dy en dz ook had willen laten zien, had ik een vierdimensionale driehoek moeten tekenen. Lastig!

andere zijde een tijdsduur; daarom moet er een c bij om de eenheden hetzelfde te houden. Maar het grootste verschil is dat minteken. Bij een gewone driehoek mag je de zijdes elke lengte geven die je wil, maar vanwege dat minteken is dat nu niet meer zo. Bijvoorbeeld, je kan de zijde Δx nooit kleiner maken dan $c\Delta t$, anders krijg je een onzinnige[10] uitkomst voor de schuine zijde Δs. Deze driehoek is, vanwege dat minteken tussen tijd en ruimte en zijn rare eigenschappen, niet zo makkelijk te tekenen op een vlak papier. Dat is precies wat het *betekent* als we zeggen dat iets een niet-vlakke geometrie heeft. De tekening van deze driehoek beneden mag je daarom met een korreltje zout nemen[11].

[10] Δs^2 wordt dan negatief, en dat geeft problemen bij het worteltrekken om Δs te vinden. Nu bestaan er in de wiskunde wel manieren om daarmee te rekenen (dit heten de *complexe getallen*), maar om er een *meetbare* afstand van te maken (een die langs een lineaal gelegd kan worden) hebben we daar niks aan....

[11] Om dit wél correct in een plaatje te tekenen, moet er een nieuw soort grafiekenpapier worden gebruikt. Dit zijn de zogenaamde *Minkowski-diagrammen*.



Komt deze driehoek met die onveranderlijke schuine zijde uit de lucht vallen? Nee hoor! We weten namelijk hoe we Δx, Δt van het ene inertiaalstelsel kunnen omschrijven naar die van het andere: door onze coördinaattransformatieformules te gebruiken. Het is een kwestie van deze invullen in 3.13 en uitwerken[12], om te vinden dat

$$\Delta x_A^2 - c^2\Delta t_A^2 = \Delta x_B^2 - c^2\Delta t_B^2. \tag{3.14}$$

[12] Als we de Lorentz-transformaties kwadrateren vinden we dat

$$\begin{aligned}\Delta x_B^2 &= \gamma^2(\Delta x_A - v\Delta t_A)^2\\ &= \gamma^2(\Delta x_A^2 + v^2\Delta t_A^2 - 2v\Delta x_A\Delta t_A),\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}-c^2\Delta t_B^2 &= -c^2\gamma^2(\Delta t_A - v/c^2\,\Delta x_A)^2\\ &= -\gamma^2(c^2\Delta t_A^2 + v^2/c^2\Delta x_A^2 - 2v\Delta x_A\Delta t_A).\end{aligned}$$

Deze bij elkaar opgeteld laten een paar termen tegen elkaar wegvallen, en er blijft over

$$\begin{aligned}&\Delta x_B^2 - c^2\Delta t_B^2\\ =\ &\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x_A^2 - \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2\Delta t_A^2.\end{aligned}$$

Met definitie van de Lorentz-factor γ ingevuld wordt dit precies 3.14.

De lengte van de schuine zijde Δs is dus inderdaad hetzelfde getalletje in beide stelsels A en B. Dit is niks nieuws, gewoon een gevolg van wat we eerder al hadden afgeleid uit inertiaalstelsels. Deze driehoek is dus eigenlijk niks anders dan de Lorentz-transformaties weergegeven in een plaatje. Deze schuine zijde heeft een speciale naam[13], het *Minkowski lijn-element*, naar de wiskundige die zag dat Einsteins Speciale Relativiteitstheorie herschreven kan worden in geometrie van driehoeken (al zijn het wat gekke driehoeken).

[13] 'Lijn-element' is een term uit de meetkunde, die aangeeft hoe je afstanden kan meten op een niet-vlakke ruimte. Hier is dat de schuine zijde van de driehoek.

Net zoals bij 'gewone' driehoeken kunnen we ook hier de hoek veranderen, waardoor de zijdes korter of langer worden en je een nieuwe driehoek krijgt. Deze nieuwe driehoek is hoe de wereld eruit ziet in een ander inertiaalstelsel. Een verandering van de lengte van de 'tijd'-zijde wordt gecompenseerd door een verandering van de lengte van de 'ruimte'-zijde. Tijd en ruimte kunnen zo in elkaar worden omgezet! Dit is, in geometrische termen, wat er gebeurt als er tijdrek of lengtekrimp plaatsvindt. Relativiteitstheorie is geometrie geworden!

3.7 Tijdrek en lengtekrimp

Daarmee kunnen we leuke opgaven doen. Zo kun je bijvoorbeeld makkelijk de formule voor tijdrek bepalen. Kijk maar. Laten we een klok nemen, en die bekijken vanuit een stelsel A waarin de klok niet beweegt. Dan geldt dat de afstand Δx_A tussen twee tikken van de klok gelijk is aan nul; de hoeveelheid tijd noemen we $\Delta\tau$. In een ander inertiaalstelsel B zal de klok een snelheid v hebben. De afstand Δx_B tussen de twee tikken is dan dus $v \times \Delta t_B$. Ingevuld in het Minkowski lijn-element en een beetje opschonen[14] geeft $\Delta t_B = \gamma\,\Delta\tau$, de formule voor tijdrek.

En de formule voor lengtekrimp? Net zo makkelijk! Neem een stok in zijn ruststelsel A. Dan beweegt de stok gezien vanuit Stelsel B met een snelheid v. Als ik, vanuit mijn Stelsel B, wil weten hoe lang de stok is, moet ik meten waar de voor en achterkant van de stok is. Maar, ik moet die twee metingen wel *op hetzelfde moment doen*. Als ik eerst de plek van de voorkant kant van de stok zou meten, dan een seconde of vijf wacht, en dán pas de plek van de achterkant van de stok, dan kom ik verkeerd uit omdat de stok tussen mijn twee metingen door een stukje bewogen heeft. Lengte meten in Stelsel B vereist dus dat $\Delta t_B = 0$. De afstand tussen mijn twee metingen geeft mij de lengte van de stok, $\Delta x_B = L_B$. Ondertussen zien ze in Stelsel A mij de twee metingen doen op voor-en achterkant van de stok, en die afstand tussen mijn twee metingen is voor hen de lengte van de stok in hun eigen stelsel, $\Delta x_A = L_A$. Ingevuld in 3.14 levert me op: $L_B^2 = L_A - c^2\Delta t_A^2$. Hoeveel tijd zat er tussen die twee metingen, gezien vanuit Stelsel A[15]? Wel, in Stelsel A is de afstand tussen mijn twee metingen L_A en daarmee kunnen zij berekenen hoeveel tijd er tussen de metingen zat: $\Delta t_A = L_A/v$. Dan vind ik daarmee $L_B^2 = L_A^2 - c^2 L_A^2/v^2$. Opgeschoond wordt dit $L_B = L_A/\gamma$, de formule voor lengtekrimp.

Zo zien we dat we alle resultaten uit de Speciale Relativiteitstheorie kunnen interpreteren als deze nieuwe geometrische regel 3.14. Deze stap is heel belangrijk, want in Lesbrief 5 gaan we ook de *Algemene* Relativiteitstheorie als geometrie maken! Goed dus dat we dat nu al bij de Speciale Relativiteitstheorie hebben gedaan.

[14] Gebruik dat $\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = v$, de snelheid van de klok gezien vanuit stelsel B.

[15] Misschien verleidelijk om hier tijdrek te gebruiken, $\Delta t_A = \gamma\,\Delta t_B$ of $\Delta t_B = \gamma\,\Delta t_A$. Maar dat mag niet! De formule voor tijdrek mag je alleen gebruiken als de twee metingen op dezelfde plek plaatsvinden. En dat was niet zo, zowel niet in Stelsel A als in Stelsel B.

4

Lesbrief 4: Relativistische mechanica

4.1 Introductie

In de vorige Lesbrieven hebben we gezien dat de Speciale Relativiteitstheorie een prachtig bouwwerk is over tijd en ruimte. Tot nu toe hebben we daarmee het alleen nog maar gehad over hoe dingen *gezien* worden uit verschillende inertiaalstelsels. Maar, we hebben nog niet gezien wat er gebeurt als we *interactie* hebben met wat er in de ruimtetijd rondbeweegt. In Newtoniaanse natuurkunde kunnen we daar de Tweede Wet voor gebruiken. Hoe moet dit eigenlijk als we beweging willen veranderen in de regels van de Relativiteitstheorie? Nu tijd en ruimte zo anders geworden zijn, kunnen die bewegingsregels niet meer hetzelfde zijn als bij Newton.

Eén reden is dat beweging een combinatie is van afstand en tijdsduren, en daar gelden nu nieuwe regels voor die we eerder hebben afgeleid. Maar daarnaast is het zo dat afstanden en tijdsduren verschillend zijn in elk inertiaalstelsel, vanwege tijdrek en lengtekrimp. De Wetten van Newton zullen daarom moeten worden aangepast om dit allemaal netjes ingebouwd te krijgen. Dat ga ik in deze Lesbrief doen. We vinden dan hoe de Tweede Wet van Newton eruit ziet in de Minkowski ruimtetijd, en wat de regels zijn voor energie en impuls. Én, we zullen dan meteen zien waarom niks sneller kan dan het licht.

4.2 Massa wordt niet groter bij hoge snelheid!

De lichtsnelheid c is de hoogst haalbare snelheid van de natuur. Dat zullen we later in deze Lesbrief op twee manieren bewijzen, maar je kan het al een beetje zien aan de Lorentz-factor die we hebben gezien in Lesbrieven 2 en 3. Die is een functie van de snelheid waarmee het object ten opzichte van de waarnemer reist en geeft rare uitkomsten wanneer snelheid v groter wordt dan die van het licht.
De reden die vaak gegeven wordt, is dat de massa van een object afhangt van zijn snelheid: de zogenaamde relativistische massa m_{rel}, gegeven door de formule

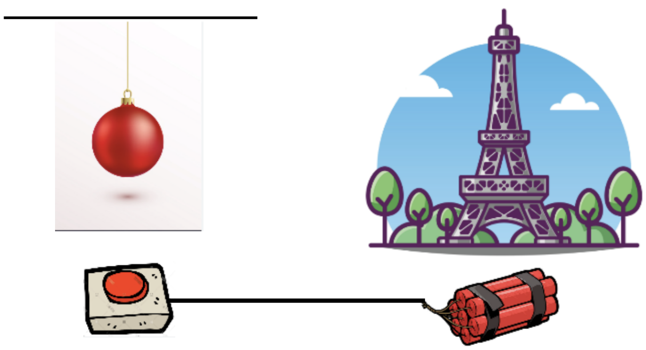
$$m_{\text{rel}} = \gamma\, m_0. \tag{4.1}$$

Hierin noemt men m_0 dan de *rustmassa* van het object. Bij lage snelheden is γ vrijwel gelijk aan 1, maar wanneer het object de snelheid van het licht nadert gaat γ, en daarmee de relativistische massa, steeds meer naar oneindig. Oneindig grote massa is lastig versnellen, en daarom zouden objecten niet met de lichtsnelheid kunnen reizen.
Deze uitleg is onjuist. Zet maar eens een leerling op een weegschaal, en vraag de rest van de klas of het wijzertje van de weegschaal een ander getalletje aan zal wijzen als we (heel, heel snel) gaan lopen ten opzichte van de weegschaal. Hoe weet die weegschaal dat wij haar vanuit beweging bekijken? En wat is er aan de samenstelling van de leerling veranderd dat de aarde harder aan haar trekt? En wat ziet de leerling zelf als ze naar het wijzertje kijkt (zij staat immers stil ten opzichte van haar eigen massa)? Terechte vragen, die laten zien dat er toch iets niet in orde is met die relativistische massa.

Toch staat die ´massa wordt groter´ uitleg in veel schoolboeken. Dat kan voor flinke verwarring zorgen. Soms werkt het wél. Een bekend voorbeeld daarvan is de impuls p: bij Newton wordt die gegeven door $p = mv$, en zijn relativistische versie is inderdaad $p = m_{\text{rel}}v$, zoals we zometeen zullen afleiden. Experimenten waarin deeltjes relativistisch bewegen zoals de LHC, meten vaak impuls, en geven daarom uitkomsten die overeenkomen met de relativistische massa. Maar, dit is de uitzondering op de regel. Neem maar eens de Newtoniaanse formule voor de kinetische energie, $E = \frac{1}{2}mv^2$, en pas daarin dezelfde truc toe om de massa te vervangen door relativistische: de uitkomst is niet de correcte relativistische formule voor kinetische energie (die is namelijk $E = (\gamma - 1)mc^2$, zoals ik verderop laat zien). Alle experimenten waarin massa *rechtstreeks* (niét via impuls) gemeten wordt, laten zien dat massa onafhankelijk is van snelheid. En niet alleen doet m_{rel} onjuiste voorspellingen, ook leidt die tot tegenstrijdigheden, zoals de volgende.

4.3 Een tegenstrijdigheid!

We hangen een bowlingbal met een massa van 10 kg aan een koord dat een maximale spankracht van 100 N heeft. Het koord kan de zwaartekracht op de bowlingbal dus nét aan, zonder te breken. Om gemeen te zijn, hebben we op de grond, recht onder de bungelende bal, een drukknop neergezet waarmee springstof onder de Eiffeltoren aangestoken wordt, zoals in de figuur beneden. Vervolgens gaan we



(heel, heel) hard rennen ten opzichte van bowlingbal. Vanaf dit referentiestelsel gemeten heeft de bowlingbal een snelheid en zou de zwaartekracht, als we de toename van massa door snelheid geloven, voorbij de spankracht van het koord groeien. In dit stelsel breekt het koord, en ontploft de Eiffeltoren. Dat is vreemd. Want als we nu eens een tweede waarnemer hadden genomen die al die tijd stil was blijven staan ten opzichte van de bowlingbal, dan zou voor haar het koord niét gebroken zijn. In haar stelsel staat de Eiffeltoren nog als een huis. We hebben dan twee waarnemers die naar precies hetzelfde systeem kijken, en toch twee verschillende uitkomsten zien: afhankelijk aan welk van de twee waarnemers je het vraagt, is de Eiffeltoren zowel wél, als niét opgeblazen! Dat is tegenspraak.

Nu is het in de Speciale Relativiteitstheorie niet ongebruikelijk om op tegenspraken te stuiten; denk bijvoorbeeld aan de tweelingparadox. Vaak is de reden dat niet alle effecten van de relativiteitstheorie netjes zijn meegenomen. Wanneer dat allemaal wél nauwkeurig gedaan wordt, verdwijnen zulke tegenspraken als sneeuw voor de zon. Is dat in onze situatie ook het geval? Misschien voorspelt de relativiteitstheorie dat het koord steviger is bezien vanuit het referentiestelsel waarin het beweegt. Dat is onjuist: het koord staat loodrecht op bewegingsrichting en voelt daarom geen lengtekrimp. Ook is het systeem statisch, waardoor er geen invloed van tijddilatatie is. En omdat de beide waarnemers met constante snelheid bewegen ten opzichte van elkaar, is er geen enkele invloed van de Algemene Relativiteitstheorie. De spankracht van het koord is volstrekt onafhankelijk van relativistische effecten. De twee verschillende uitkomsten die uit ons experiment volgen, is geen paradox, maar een werkelijke tegenspraak. De conclusie is dat de toename van massa als functie van snelheid onjuist is. Precies in overeenkomst met de metingen.

Een scherpe lezer zou nog één poging kunnen wagen de tegenstrijdigheid te verklaren door goed naar de definitie van massa te kijken. In de natuurkunde betekent de massa m van de bowlingbal twee dingen tegelijk: enerzijds meet zij het verzet van de bal tegen versnelling (de zogenaamde *inertiaalmassa*), anderzijds meet zij hoe sterk de bal door zwaartekracht aangetrokken wordt (de zogenaamde *gravitatiemassa*). Als nu eens alléén de inertiaalmassa van snelheid af zou hangen en gravitatiemassa niet, dan zou het koord voor *beide* waarnemers niet breken, en verdwijnt de tegenstrijdigheid. Maar ja, de gelijkwaardigheid[1] van inertiaalmassa en gravitatiemassa, het *Equivalentieprincipe*, is een van de meest nauwkeurig gemeten feiten uit de gehele natuurkunde: dertien(!) cijfers achter de komma is gebruikelijk. Als inertiaalmassa wél groter zou worden bij hoge snelheid, maar gravitatiemassa niét, dan zouden er referentiestelsels zijn waarin het Equivalentieprincipe niet meer correct is. Dat is meetbaar onjuist.

[1] We gaan het in Lesbrief 5 nog veel meer over deze gelijkwaardigheid hebben, en hoe het Equivalentieprincipe leidt tot de kromming van ruimte en tijd.

4.4 De relativistische Tweede Wet van Newton

Als massa niet toeneemt bij hoge snelheid, dan kan dit niet de verklaring zijn dat objecten niet sneller dan het licht kunnen bewegen. Wat is dan wél de reden? Om dat antwoord te vinden, zullen we de relativistische versie van de Tweede Wet van Newton moeten opstellen.

Maar wacht even, bestáát er wel zoiets als een tweede wet van Newton in de Speciale Relativiteitstheorie? Immers, die wet gaat over krachten en versnellingen, en een veelgehoorde regel is namelijk dat de Speciale Relativiteitstheorie alleen op zou gaan bij constante snelheden. Geen zorgen: we zagen in Lesbrief 1 en 3 al dat de Speciale Relativiteitstheorie prima in staat is om versnellende massa’s te beschrijven, mits wij als waarnemers ons maar in een inertiaalstelsel bevinden.

Hoe leid je de Tweede Wet van Newton af? Eén manier is om de tijdsafgeleide van impuls $p = \gamma\, mv$ te nemen; dat is namelijk per definitie gelijk aan de kracht F. Een simpele oefening[2] in differentiëren vertelt ons dan dat

$$F = \gamma^3\, ma. \tag{4.2}$$

Dat is interessant, én onverwacht: de Lorentzfactor γ verschijnt hier tot de derde macht[3]! En dat is nu precies de reden waarom een massa niet sneller mag reizen dan c. Want wanneer heeft iets zijn hoogste snelheid bereikt? Wel, wanneer het niet meer versnelt, oftewel wanneer $a = 0$ geworden. Die versnelling plukken we uit 4.2 door die om te schrijven als

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}, \tag{4.3}$$

en de haakjes $(..)^{3/2}$ zijn nul wanneer $v = c$. Een massa houdt dus op te versnellen wanneer het met de lichtsnelheid reist. Je kan zien dat dit waar is ongeacht hoe groot de kracht F is en/of hoe lang die kracht op de massa werkt: 0 keer F/m blijft toch echt nul.

Die mysterieuze derde macht van γ verschijnt hier uit de magie van het differentiëren, zonder dat het erg duidelijk is wat de fysische verklaring is. Gelukkig is in de Speciale Relativiteitstheorie alles altijd terug te voeren naar tijd en ruimte. Laten we daarom nog eens deze formule bekijken, maar deze keer vanuit de basisbegrippen lengtekrimp en tijddilatatie. We bekijken een massa die aan het versnellen is. Versnelling is niks anders dan toegenomen snelheid gedeeld door de tijd die de toename duurt, maar vanuit ons stelsel gezien loopt de tijd van de massa steeds trager. Het kost, gezien vanuit ons stelsel, dus steeds méér seconden om de massa extra snelheid te zien krijgen: de versnelling gaat dus omlaag naarmate de Lorentzfactor γ groeit. De onmogelijkheid om sneller te reizen dan het licht is dus gewoon tijdrek.

[2] Vergeet niet dat v (en daarmee γ) niet per se constant is, en je dus de produktregel van differentiëren moet gebruiken omdat v twee keer in de relativistische impuls voorkomt. Gebruik ook dat $\frac{d}{dt}\gamma = \gamma^3\, v\, a$.

[3] Trouwens, hier zie je nog eens dat de truc van massa vervangen door relativistische massa de verkeerde uitkomst geeft. Zouden we dan bij de Tweede Wet van Newton gedaan hebben, dan was hier $F = \gamma\, ma$ uitgekomen zijn, een Lorentzfactor tot de *eerste* macht.

4.5 Voorbeeld: oneindig lang versnellen

Een leerling zou dit best gek kunnen vinden. Massa's versnellen wanneer er een kracht op werkt, dus als je oneindig lang aan een massa trekt[4] zou die toch na lang genoeg trekken, de lichtsnelheid moeten bereiken (en er zelfs overheen moeten gaan)? Dat dat niet gebeurt, kunnen we uit de relativistische Tweede Wet van Newton halen. Ik neem als voorbeeld een bal met massa m waar ik een constante kracht F op laat werken. De Tweede Wet van Newton wordt dan

$$F = \gamma^3(v)\, m\, a. \tag{4.4}$$

[4] Bijvoorbeeld, ik heb de bal een elektrische lading gegeven en heb daarna een elektrisch veld aangebracht. Of, makkelijker nog, ik laat de bal van grote hoogte vallen en laat zwaartekracht haar werk doen. In beide voorbeeldjes moet ik wel even aannemen dat de kracht lang genoeg de tijd krijgt om te trekken, dus mijn elektrisch veld moet over heel grote afstand werken, of de hoogte moet flink groot zijn (en dan is vaak de zwaartekracht niet erg constant, want die wordt groter naarmate de bal dichter bij het oppervlak komt). Praktisch niet zo makkelijk, maar het gaat even om een hypothetische situatie.

In normale mechanica zou dit een makkelijk sommetje zijn: constante kracht betekent constante versnelling en de plaatsfunctie wordt dan $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0\,t + x_0$, waarin x_0 de beginpositie van de bal is, en v_0 de beginsnelheid. Maar, in relativiteitstheorie is het vinden van de plaatsfunctie een stuk moeilijker. De Lorentz-factor γ bevat namelijk de snelheid $v(t)$ van de bal, en dat is zelf weer de afgeleide van die plaatsfunctie die we zoeken. Zo'n soort vergelijking, waarin wat we willen weten ($x(t)$) er ook als zijn eigen afgeleiden ($v(t)$, $a(t)$) voorkomt, heet in de wiskunde een *differentiaalvergelijking*. Het is vaak een hele toer om de oplossing $x(t)$ te vinden[5]. In dit geval is het trouwens makkelijker om de snelheid $v(t)$ op te lossen. Deze is:

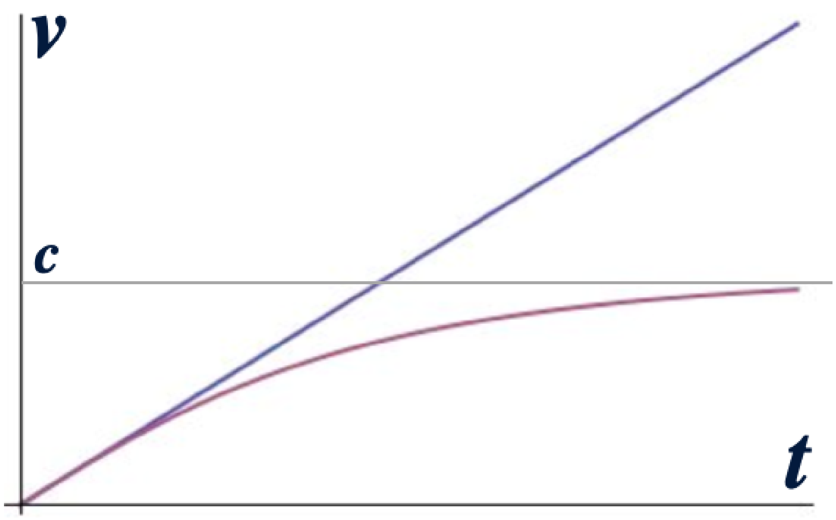
$$v(t) = \frac{1}{m}\frac{F\,t}{\sqrt{1+\left(\frac{F\,t}{mc}\right)^2}}. \tag{4.5}$$

[5] In ons geval van een constante kracht is deze

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1+\left(\frac{F\,t}{mc}\right)^2}-1\right).$$

Een stuk ingewikkelder dus dan de plaatsfunctie die uit de normale Tweede Wet van Newton komt rollen! Om te checken dat deze klopt: afgeleiden nemen, die invullen in 4.4, en dan een half uurtje algebra doen laat zien dat dit klopt. Tip: neem er een pot koffie bij. Niet moeilijk, maar duurt wel lang..
De tijdsafgeleide, de snelheid dus, staat in 4.5

Terug naar die vraag: als we nu oneindig lang aan die bal trekken, wat gebeurt er dan met de snelheid? Wel, als we t heel groot maken, wordt die 1 in de noemer van de breuk steeds minder belangrijk en wordt die noemer meer en meer gelijk aan $\frac{F\,t}{mc}$. Dan schoont de breuk behoorlijk op, en wordt dan gelijk aan $v(t) \to c$. Na oneindig lang trekken aan de bal zal die dus de lichtsnelheid bereiken (maar er niet overheen gaan). Dat kun je ook mooi zien aan de snelheidgrafiek die uit deze formule komt. De blauwe lijn is wat Newton voorspelt, en de rode is wat relativiteitstheorie voorspelt. De blauwe lijn blijft altijd groter worden, maar de rode lijn zwakt na verloop van tijd af en wordt daarna constant bij c.



4.6 Energie en impuls

In Lesbrief 3 had ik al het Minkowski lijn-element laten zien, die zegt dat je de relativiteitstheorie kan zien als een geometrie van driehoeken. Diezelfde geometrie kunnen we nu ook gebruiken om formules voor de energie en impuls van een massa te vinden. Laten we nog eens dat lijn-element opschrijven, nu met $c^2 d\tau^2$ aan de linkerkant:

$$c^2\,\Delta\tau^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2. \tag{4.6}$$

Deze formule gaf voor elke waarnemer in elk inertiaalstelsel dezelfde uitkomst. Ik kan deze formule omtoveren tot andere formules die voor iedereen dezelfde uitkomsten opleveren, maar dat werkt alleen als ik daar getalletjes voor gebruik die voor alle waarnemers hetzelfde zijn. Daar kennen we er nu twee van: de lichtsnelheid c (gepostuleerd door Einstein, maar afgeleid uit elektromagnetisme in Lesbrief 2, en afgeleid uit de Eerste Wet van Newton in Lesbrief 3), en de massa m (eerder in deze Lesbrief laten zien). Ik mag daarom het Minkowski lijn-element met net zoveel m en c vermenigvuldigen als ik wil. Bijvoorbeeld, met m^2. Ik krijg dan

$$m^2c^2 = \frac{1}{c^2}\left(mc^2\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)^2 - \left(m\frac{\Delta x}{\Delta\tau}\right)^2, \tag{4.7}$$

(ik heb ook beide zijden door $\Delta\tau^2$ gedeeld.)
Laten we even kijken wat elk van de twee sets haakjes zegt. De tweede set bevat een soort snelheid: afstand gedeeld door tijd. Maar, het is de afstand zoals gemeten vanuit een inertiaalstelsel waarin de massa beweegt, gedeeld door de hoeveelheid tijd gemeten door de bewegende massa zelf. Tijdsuur in het ruststelsel dus, maar afstand in een ander inertiaalstelsel. Als we de snelheid v van de massa willen berekenen, moeten we de gemeten afstand nemen gedeeld door Δt, niet door $\Delta\tau$. Gelukkig weten we hoe de een in de ander kunnen omrekenen: via de tijdrekformule $\Delta t = \gamma\,\Delta\tau$! De eerste set haakjes wordt daarom

$$\left(\gamma\, m\frac{\Delta x}{\Delta t}\right). \tag{4.8}$$

Dit noemen we de relativistische impuls! Hij is net als de normale impuls, behalve dat de tijdrek erin is meegenomen. Bij langzaam (vergeleken met het licht) bewegende massa's is γ bijna gelijk aan 1 en wordt de relativistische impuls gelijk aan de Newtoniaanse impuls. Net als de Newtoniaanse impuls, is de relativistische impuls een behouden grootheid: in elk proces moet zij dezelfde blijven aannemen[6].
En die eerste set haakjes? Dat is de energie van de bewegende massa! Dat kun je al zien aan de eenheid ervan, maar als je de snelheid van de

[6] Dit is een gewoon de Derde Wet van Newton. Kracht is de verandering van de impuls: $F = \frac{dp}{dt}$, en als elke kracht precies uitgebalanceerd wordt door een tegenkracht is de totale F gelijk aan nu. Dat is hetzelfde als zeggen dat de totale impuls niet veranderd is.

massa laag maakt, zie je het heel precies. Kijk maar: via tijdrek weten we dat $\Delta t/\Delta\tau = \gamma$, en de Lorentz-factor wordt bij lage snelheid vrijwel gelijk[7] aan $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$. De tweede set haakjes wordt dan dus

$$\begin{aligned}\left(\gamma\, mc^2\right) &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) mc^2 \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

[7] Ik gebruik hier een leuk wiskundig regeltje, dat $(1+b)^n$ vrijwel gelijk is aan $1 + n\,b$. Deze regel geldt wanneer $n\,b$ veel kleiner is dan 1.
In onze toepassing hier is $n = -1/2$ en $b = -(v/c)^2$. Bij lage snelheid v is onze $b\,x$ inderdaad veel kleiner dan 1, dus we mogen dit regeltje hier gebruiken.

Dat is de kinetische energie! Maar wacht, er staat een extra term bij, mc^2. Het is maar een constante bijdrage, dus je kan hem net zo goed weglaten[8]. Maar er is wel iets bijzonders aan deze bijdrage. Het deel $\frac{1}{2}mv^2$ kun je naar hartelust groter en kleiner maken door de massa extra of minder snelheid te geven, maar van de mc^2 kom je niet af door de massa vanuit andere inertiaalstelsels te bekijken. Anders gezegd: het maakt niet uit vanaf welk inertiaalstelsel je de bewegende massa bekijkt, hij heeft altijd op zijn minst de energie mc^2. Net als de impuls, is ook de relativistische energie behouden, en moet gelijk blijven in elk proces.

[8] Bij sommetjes over energieomzetting maakt het niet uit of je er 10, 100 of 1492.334 bij optelt of aftrekt. Een steen die je omhoog gooit heeft een toename van mgh, en een afname van $\frac{1}{2}mv^2$, en de uitkomsten van zulke sommetjes hangen alleen af van de *verandering* van energie-waarden. Elke constante bijdrage valt er dan altijd uit. Daarom maakt het niet uit of je de hoogte-energie berekend gemeten vanaf de begane grond of de eerste verdieping.

Mooi, het Minkowski lijn-element is nu omgetoverd tot een formule die energie, impuls, en massa aan elkaar knoopt: $m^2c^2 = E^2/c^2 - p^2$, of anders opgeschreven:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{4.10}$$

waarin

$$E = \gamma\, mc^2, \qquad p = \gamma\, mv. \tag{4.11}$$

Met deze *energie-impuls vergelijking* kunnen we allerlei processen in de natuurkunde goed beschrijven en berekenen. Het geeft bovendien een leuke nieuwe betekenis aan massa: als je energie wil aftappen van een beweging mag dat (net als in Newtoniaanse mechanica) door snelheid af te nemen, maar (en dit is nieuw) ook door de massa kleiner te maken. Dit nieuwe effect is wat er gebeurt in kernsplijting, of bij radioactief verval van deeltjes. Massa is dus een 'reserve-tank' gevuld met energie! Het verlies van massa om daar energie uit te halen heet het *massa defect*. Andersom werkt het trouwens ook: je kan energie omzetten in massa, bijvoorbeeld door twee deeltjes met hoge snelheid op elkaar te laten botsen. Dit is hoe ze op CERN nieuwe deeltjes maken, zoals het Higgs-deeltje. Dit alles is dus niks anders dan het Minkowski lijn-element in een nieuw jasje.

4.7 Waarom niks sneller kan dan het licht

Waarom kan een massa niet sneller bewegen dan licht? Eerder zagen we al dat dat niks te maken heeft met massa's die groter worden bij hoge snelheid (dit effect bestaat niet), maar dat de relativistische versie van de Tweede Wet van Newton zegt dat het niks anders is dan tijdrek: bij hoge snelheid duurt het steeds langer om de massa een extra dosis snelheid te geven. Maar, met onze nieuwe formules voor energie en impuls kunnen we dit ook op een andere manier begrijpen. Ik pak de relativistische energie[9] er nog eens bij en schrijf de Lorentz-factor daarin uit:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{4.12}$$

Wat zegt deze formule als de massa m met de lichtsnelheid beweegt? Dan wordt de noemer gelijk aan nul, en delen door nul levert oneindig op. Zo'n massa die met de lichtsnelheid beweegt heeft dus een enorme hoeveelheid energie nodig. Maar, energie is behouden: wat de massa nodig heeft om die snelheid te bereiken, moet van de omgeving gekomen zijn (bijvoorbeeld uit een elektrisch veld, of door aan de massa te trekken of te duwen). Oneindig veel energie leveren is onmogelijk. Het is zelfs erger dan dat: niet alleen is de totale energie die over moet worden geheveld oneindig groot (genoeg reden om te concluderen dat het nooit zal gebeuren), maar ook is er nog die tijdrek. Het overhevelen van energie gaat steeds langzamer naarmate de massa sneller beweegt. Dan duurt het dus ook nog eens oneindig lang om dit voor elkaar te krijgen. Massa kan daarom niet met de lichtsnelheid. De regels van tijd en ruimte spannen samen om dit te voorkomen.

[9] Oh ja, ik had beloofd de formule voor de kinetische energie nog af te leiden. Deze energie is per definitie de energie ten gevolge van beweging. We zagen al eerder dat elke massa op zijn minst een hoeveelheid mc^2 met zich meedraagt, of de massa in het gegeven inertiaalstelsel nu beweegt of niet. Deze energie kan dus niet met beweging te maken hebben. Dan moet de totale energie min deze mc^2 dus de energie zijn die wél door beweging komt. De kinetische energie K in de Speciale Relativiteitstheorie is daarom $K = E - mc^2$, en dat komt neer op

$$K = (\gamma - 1)\, mc^2.$$

Er is één uitzondering op deze regel. Als de massa nul is én $v = c$, dan vechten teller en noemer met elkaar: de noemer wil de uitkomst naar ∞ halen, maar de teller juist naar 0. En dan kan het zomaar dat de uitkomst niet meer oneindig is, en het dus geen oneindige energie kost om die lichtsnelheid te bereiken. Kort gezegd: je mag wel met de lichtsnelheid c reizen, maar alleen als je geen massa hebt. De conclusie werkt trouwens ook andersom: als iets een massa heeft van nul, dan *moet* het met c reizen.

Prima, maar wat is dan nu de uitkomst[10] van de breuk? Relativiteitstheorie kan het antwoord niet geven. Gelukkig kan de quantumfysica dat wél. Die zegt dat de energie van een massaloos deeltje gelijk is aan $E = hf$. Hierin is h de constante van Planck, en is f hoe vaak per seconde de quantumgolf van het deeltje op en neer beweegt. Quantum Physics to the rescue!

[10] Wiskundigen noemen zo'n $0/0$-breuk een *onbepaaldheid*: de uitkomst is afhankelijk of de teller of noemer ´het snelst´ naar zijn gewenste uitkomst gaat. En dat wordt bepaald door de context van de berekening.

5
Lesbrief 5: Zwaartekracht en kromming van de ruimtetijd

5.1 Introductie

In Lesbrief 1 hadden we gezien wat er gebeurt als we natuurkunde willen doen vanuit een niet-inertiaalstelsel. Er komen dan schijnkrachten bij, die het idee geven dat er aan massa's getrokken of geduwd wordt. En zulke schijnkrachten hebben een hoop gemeen met zwaartekracht, zoals we in deze Lesbrief zullen zien. Er blijkt een heel nauw verband te bestaan tussen niet-inertiaalsystemen en zwaartekracht. Tijd om dat verband te onderzoeken dus!

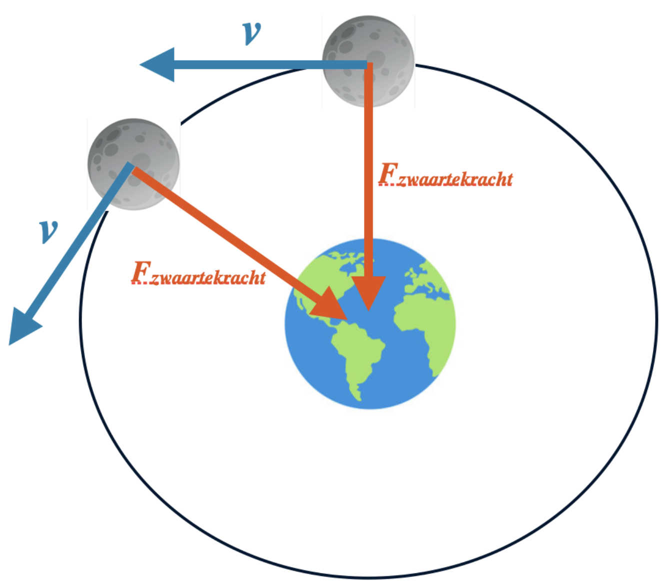
Dit verband bestaat trouwens al in de Newtoniaanse zwaartekracht. Om dat te laten zien zal ik beginnen met onze inzichten over inertiaalstelsels en niet-inertiaalstelsels te gebruiken om de Universele Zwaartekrachtswet af te leiden. En op basis daarvan vinden we dat je zwaartekracht kan zien als de kromming van ruimte. Tot zover is er nog geen Relativiteitstheorie nodig geweest. Maar, door dit alles te vermengen met wat we gezien hebben in de vorige Lesbrieven, komen we uit bij Einsteins Algemene Relativiteitstheorie, die tijd, ruimte, en zwaartekracht met elkaar verbindt!

5.2 Afleiding van de Universele Zwaartekrachtswet

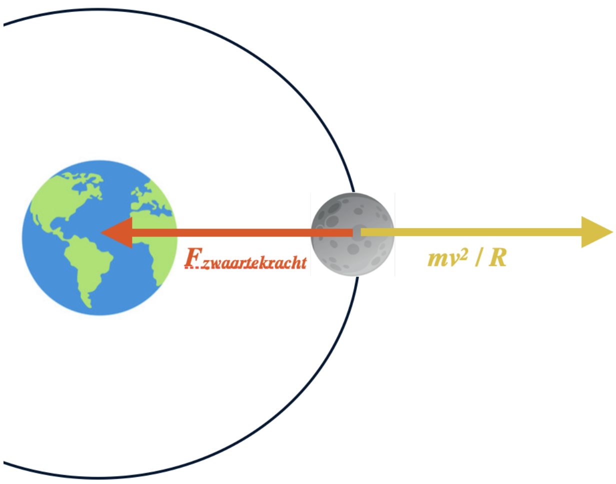
In Lesbrief 1 hadden we een schijnkracht al afgeleid: de centrifugaalkracht. Het is de kracht die je denkt te voelen als je op een roterend niet-inertiaalstelsel staat en die je naar buiten probeert te trekken, weg van het midden van je draaiende referentiestelsel.
Laten we deze schijnkracht toepassen door op twee manieren naar het aarde-maansysteem kijken, en uitzoeken waarom de maan netjes in een baan rond de aarde blijft zonder erop te kukelen. Voor het gemak nemen we aan dat het ruststelsel van de aarde een inertiaalstelsel is[1]; het ruststelsel van de maan is dan een niet-inertiaalstelsel.

[1] In werkelijkheid is de aarde geen inertiaalstelsel, zoals je aan de spiraliserende beweging van wolken kan zien; die voelen schijnkrachten. Superhandig als je een raket wil laten opstijgen (de schijnkracht geeft hem een flinke zwiep mee die helpt om aan de zwaartekracht van de aarde te ontkomen), maar om ons voorbeeld niet ingewikkelder te maken dan nodig, doen we hier net even alsof de aarde wél een inertiaalstelsel is. We negeren daarom de draaiing van de aarde om haar as, en om de zon.

Vanuit het referentiesysteem van de aarde is er slechts één kracht op de maan: de zwaartekracht die hem naar zich toe trekt. Maar aangezien de maan in dit stelsel in een rechte lijn probeert te bewegen, staan zijn bewegingslijn en de zwaartekracht loodrecht op elkaar. Netto zal de maan 'door het midden' gaan. Een klein beetje later, aangekomen op zijn nieuwe plek, geldt hetzelfde: opnieuw wil de maan wil in rechte lijn voortbewegen en staat de zwaartekracht daar loodrecht op, en weer gaat de maan daarom 'door het midden'. Als je dit scenario volhoudt, seconde na seconde, krijg je een mooie cirkelvormige baan. In het referentiestelsel van de aarde, heeft de maan dus een cirkelbaan omdat hij zelf rechtdoor wil, en de zwaartekracht hem afbuigt.



In het referentiesysteem van de maan (een niet-inertiaalstelsel) ziet de situatie er anders uit. Er werken nu *twee* krachten: de zwaartekracht, en ook de schijnkracht die we in Lesbrief 1 hebben afgeleid. Dus, zoals vanuit dit referentiesysteem gezien, is het de *balans* tussen de zwaartekracht en de schijnkracht die de maan in een cirkelvormige baan houdt. Twee verschillende gezichtspunten, maar wel dezelfde uitkomst.



Trouwens, Newton gebruikte dit voorbeeld om zijn Universele Wet van de Zwaartekracht af te leiden. Zoals we boven al zagen, geldt in het referentiesysteem van de maan dat de schijnkracht en de zwaartekracht precies in balans moeten zijn.

$$F_{\text{zwaartekracht}} = \frac{mv^2}{R}. \tag{5.1}$$

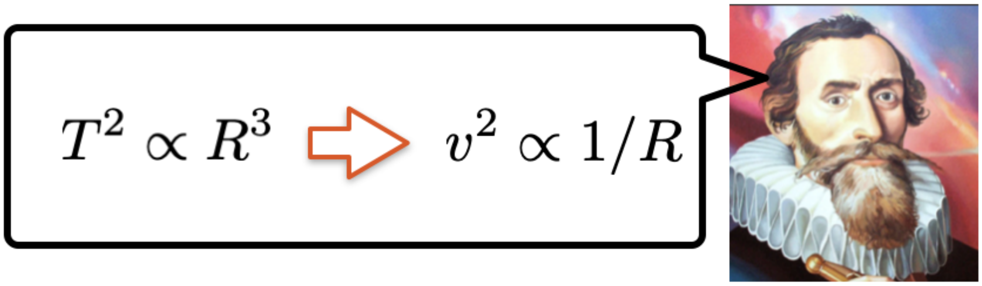
Vervolgens maakte hij gebruik van de astronomische waarnemingen van Johannes Kepler en Tycho Brahe, dat in een planeet-maanstelsel de omlooptijd evenredig is met de derde macht van de afstand tussen massa's (dit noemen we de *Derde Wet van Kepler*). In wiskunde: $T^2 \propto R^3$. Hierin is $\propto$ het *evenredigheidssymbool*: die zegt dat er nog een constant getalletje tussen T^2 en R^3 dat we nog zullen moeten vinden.

Met een simpel sommetje[2] kun je afleiden dat de omloopsnelheid v van de maan evenredig is met één gedeeld door de wortel van de afstand R tot de aarde. Als je dit in de balansvergelijking vervangt, zie je onmiddellijk dat de zwaartekracht wordt gegeven door iets gedeeld door R^2:
$F_{\text{zwaartekracht}} \propto 1/R^2$. Dat is al de helft van de zwaartekrachtsformule!

[2] Voor een cirkelbaan met straal R geldt dat de omloopsnelheid T gegeven is door $v = \frac{2\pi R}{T}$, waarin T de omlooptijd is. Nemen we nu Keplers observatie erbij dat $T^2 \propto R^3$, dan vinden we

$$\left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2 \propto R^3.$$

Even opschonen, en dan volgt meteen dat $v \propto 1/\sqrt{R}$.



Ok, daarmee ligt de noemer van $F_{\text{zwaartekracht}}$ vast. Maar hoe zit het met die andere helft, de teller van de breuk? Wel, daar moet $m\,M$ staan. Kleine m staat er om van de centrifugale versnelling een kracht te maken, maar waar komt grote M vandaan? Die komt uit de Derde Wet van Newton: hoe sterk de maan aan de aarde trekt, is precies even sterk als hoe de aarde aan de maan trekt. De formule moet dus zódanig zijn dat de twee massa's kunnen worden omgewisseld zonder de waarde van de kracht te veranderen, en dat gaat precies goed als de twee massa's als *produkt* in de formule voorkomen. Het resultaat is de Universele Wet van de Zwaartekracht:

$$F_{\text{zwaartekracht}} = -G\,\frac{m\,M}{R^2} \tag{5.2}$$

Weet je nog dat er een onbekend getalletje tussen staat? Dat is hier geschreven als G. Het minteken staat er om de richting van de kracht aan te geven.

Leuk om te weten dat Isaac Newton daarvoor alleen een goed begrip van schijnkrachten en inertiaalstelsels nodig heeft gehad, een eigen meting kwam er niet aan te pas. Die had hij met de meetinstrumenten van zijn tijd ook nooit kunnen doen, trouwens, omdat de zwaartekracht tussen massa's in een laboratorium maar héél klein is. Dat getalletje G blijkt maar $G = 6.67 \times 10^{-11}$ kg m^3/s^2 te zijn! Je hebt dus flink van massa nodig om hier tegenop te boksen. Vandaar dat het complete planeten, sterren, sterrenstelsels, ... kost voor zwaartekracht voelbaar wordt. De mensheid moest nog zeker een eeuw wachten tot Newtons Universele Zwaartekrachtswet daadwerkelijk in een laboratorium aangetoond kon worden, en daarmee de waarde van G. Hoe dat gegaan is, is een mooi verhaal voor een andere keer[3].

[3] Voor wie niet wachten kan: de wetenschapper die dit voor elkaar kreeg was Cavendish. Er zijn mooie boeken en artikelen over zijn werk te vinden.

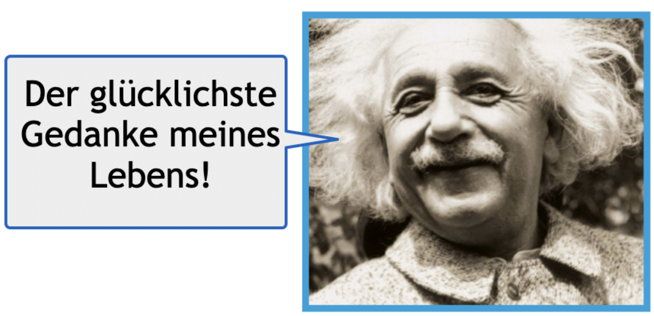
5.3 Het Equivalentieprincipe en gekromde ruimte

Mooi, zwaartekracht dus. Die kennen we goed uit de dagelijkse praktijk. Als we iets uit onze handen laten vallen (en luchtweerstand niet zo'n grote rol speelt), valt alles met dezelfde versnelling naar beneden. Elke leerling kent uit het hoofd dat die versnelling 9.81 m/s^2 is. Raar eigenlijk. Vraag een leerling om een bowlingbal op te tillen in de linkerhand, en een tennisbal in de rechter, en zie de spanning op haar gezicht staan. De linkerarm voelt de zwaartekracht trekken en trekken, maar de rechterarm nauwelijks. Laat de twee ballen los, en opeens is alle verschil verdwenen en vallen beide vrolijk met precies dezelfde versnelling naar benee. Waar is dat verschil gebleven?

Het antwoord weet niemand. Natuurlijk, als we de Tweede Wet van Newton $F = ma$ opschrijven met als nettokracht de zwaartekracht $m \times GM/r^2$, dan kun je m aan beide kanten wegstrepen en zie je meteen dat elke massa precies diezelfde versnelling g krijgt. Maar daar zit een dieper mysterie onder. *Waarom* mag je die massa's tegen elkaar wegstrepen? Dat mag wiskundig alleen als ze dezelfde waarde hebben. En dan is het goed te realiseren dat de $'m'$ aan weerszijden van $m\,a = m\,g$ eigenlijk iets heel anders betekent. Aan de linkerkant zegt m dat massa niet graag in beweging wil komen; dat is hoe de Tweede Wet van Newton massa definieert. Aan de rechterkant zegt m hoe hard de zwaartekracht trekt; dat is hoe de Universele Zwaartekrachtswet massa definieert. We zijn gewend dat die twee gewoon hetzelfde getalletje zijn, maar niemand weet waarom die twee eigenschappen van een bowlingbal, zijn traagheid en zijn zwaartekracht, door dezelfde m gerepresenteerd worden. Dát het zo is, is een van de meest nauwkeurig gemeten feiten uit de hele natuurkunde. We noemen dit het *Equivalentieprincipe*.

Het Equivalentieprincipe heeft enorme gevolgen. Want, als elk object door de zwaartekracht op precies dezelfde manier aan het bewegen wordt gebracht, *dan kan zwaartekracht geen eigenschap van objecten zijn.* Bowlingballen, peren, auto's, planeten, bloemkolen, allemaal worden ze door zwaartekracht langs hetzelfde weg naar de aarde (of naar elkaar, of naar elke andere massa) getrokken alsof ze een onzichtbaar pad volgen dat voor ieder object hetzelfde is. Vergelijk dit met een spoorrails. Het maakt niet uit wélke trein er op die rails rijdt, *elke* trein zal op dezelfde plek dezelfde bochten moeten nemen. Een soort 'equivalentieprincipe voor treinen' dus: "elke trein beweegt op precies dezelfde manier". Dat is volkomen duidelijk, want dat is omdat het pad niet een eigenschap is van de treinen, maar van de rails waarop zij rijden. Einstein realiseerde zich dat het Equivalentieprincipe voor massa's dus voorspelt dat de ruimte gevuld is met gebogen paden en kronkels. Ruimte heeft geometrie! Ik liet in Lesbrief 3 al zien dat je niet de geometrie van ruimte kan aanpassen zonder ook die van tijd te veranderen. Tijd en ruimte zitten aan elkaar vast. Daarom wordt het een gekromde *ruimtetijd*.

Dit alles doet je misschien denken aan wat we al eerder gezien hadden. Weet je nog hoe we in Lesbrief 1 zagen dat als je naar een niet-inertiaalstelsel gaat, massa's bewegen alsof er een kracht op ze werken? Deze schijnkrachten hebben een bijzondere eigenschap: ze trekken zich er niks van aan wat de waarde van de massa is. Auto's, mensen, peren, en bloemkolen krijgen precies dezelfde versnelling wanneer ze gezien worden vanuit een niet-inertiaalstelsels. En nu, uit het Equivalentieprincipe, zien we dat dat óók voor versnelling geldt die massa's krijgen door zwaartekracht. Dit leidde Einstein tot een enorm diep inzicht. Als versnelling door een schijnkracht hetzelfde is voor alle objecten, en de versnelling door zwaartekracht óók, is schijnkracht en zwaartekracht dan niet gewoon hetzelfde?



Zwaartekracht is niks anders dan de schijnkracht die een massa voelt als je de Wetten van Newton gebruikt in een niet-inertiaalstelsel!

Einstein noemde dit inzicht "de gelukkigste gedachte van mijn leven!". Hij had zich gerealiseerd dat als hij zijn Speciale Relativiteitstheorie, die alleen in inertiaalstelsels geldt, uit zou breiden naar niet-inertiaalstelsels, hij gratis en voor niks de zwaartekracht ervoor terug zou krijgen! Daarmee was zijn Algemene Relativiteitstheorie geboren: een nieuwe theorie voor zwaartekracht[4]

[4] Voor meer over het Equivalentieprincipe, zie een video met uitgebreidere uitleg gemaakt door de Universiteit van Nederland:

www.universiteitvannederland.nl/college/waarom-vallen-een-bowling-en-pingpongbal-even-snel

5.4 De metrische tensor

Hoe meet je eigenlijk dat iets krom is? Een makkelijke manier is om op te stijgen van dat oppervlak, en het dan van een afstandje te bekijken. Vanaf het heelal gezien zie je dan dat de aarde een bolvorm heeft. Maar bij de ruimtetijd is dat niet mogelijk. Welke kant moet je op om de driedimensionale ruimte 'van buiten' te bekijken?

Gelukkig is er een andere manier om kromming te zien. De Stelling van Pythagoras! Neem maar eens een strandbal, en teken er een driehoek op, met twee hoekpunten op de evenaar en het derde hoekpunt op de noordpool van de bal. De drie hoeken tellen niet netjes op tot 180 graden, maar tot 270 graden. En de schuine zijde? Die is kleiner dan wat $A^2 + B^2 = C^2$ voorspelt. Dat komt omdat deze driehoek niet op een vlakke ruimte is getekend, maar op een gekromde. De bolvorm van de strandbal verraadt zich dus door het breken van de Stelling van Pythagoras. Een heel grote driehoek op het aardoppervlak verven zou[5] de bolvorm verraden zonder dat er een raket op hoeft te stijgen om een foto te maken.

[5] Het zou een héél grote driehoek moeten zijn om de afwijking goed zichtbaar te maken, en je mag een flinke pot verf moeten meenemen. En niet iedereen is gediend van een verfstreep door hun achtertuin heen.

Zo'n afwijking van de Stelling van Pythagoras hadden we al in Lesbrief 3 gezien toen we de Speciale Relativiteitstheorie als een driehoek tekenden. Die stelling zag er daar uit als

$$\Delta s^2 = -c^2\,\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{5.3}$$

(Ik heb er deze keer ook de afstanden in y- en z-richting in opgeschreven. Dat was in Lesbrief 3 niet nodig omdat we naar inertiaalstelsels keken die alleen in x-richting bewogen ten opzichte van elkaar.)
In plaats van die hele formule opschrijven, kunnen we net zo goed de getalletjes vóór de kwadraten geven: 1, 1, 1, en $-c^2$ dus. Dat geeft ons precies dezelfde informatie over hoe die Stelling van Pythagoras er uit ziet als je hem uit zou schrijven. Die getalletjes, netjes samengevoegd in een blokje, is wat we de *metrische tensor* noemen[6]. Aan dit blokje getalletjes kun je zien of de Stelling van Pythagoras geldt. Het blokje getallen voor de Speciale Relativiteitstheorie ziet er uit als

[6] Lastige woorden! Metrisch betekent dat het de geometrie van de gekromde ruimtetijd specificeert. 'Tensor' is een bepaald type wiskunde (zoals getallen, vectoren, en matrices dat ook zijn). Tensoren zijn blokjes getallen die aan speciale regels voldoen. Het maakt voor ons hier niet erg uit wat die regels zijn, dus we hebben het er verder niet over.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Afhankelijk van hoe gek gekromd de ruimtetijd is, kunnen deze getalletjes er vreemd uitzien. En, vaak zijn het zélf functies van plaats en tijd. Dit wil dan zeggen dat de kromming van de ruimtetijd overal anders is, én verandert in de tijd. Denk aan een ballon die door een goochelaar in een gekke vorm wordt gekneed. De kromming van de ballon is niet overal hetzelfde, en, terwijl de goochelaar de ballon aan het kneden is, ook nog eens op elk tijdstip anders. Zo'n ballon zou een heel gekke versie van Pythagoras hebben, zoiets als

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= f(\text{tijd,plaats}) \times \Delta t^2 + g(\text{tijd,plaats}) \times \Delta x^2 \\ &+ h(\text{tijd,plaats}) \times \Delta y^2 + k(\text{tijd,plaats}) \times \Delta z^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

met daarin f, g, h, k functies van plaats en tijd, afhankelijk of de goochelaar een girafje, olifantje, of bolvorm kneedt. Ze geven aan hoe vervormd driehoeken zijn op elke plek van de ballon, en op elk tijdstip. Pas als ze allemaal precies gelijk zijn aan 1 gaat de gewone Stelling van Pythagoras weer op, en is de vorm van de ballon weer plat als een vel papier.

5.5 Voorbeeld van een gekromde ruimte: een bol

Poeh, erg abstract allemaal. Daarom goed om even een voorbeeld te doen! Ik zal laten zien hoe de Stelling van Pythagoras eruit ziet als je een driehoek zou tekenen op een bol, zoals een opgeblazen ronde ballon of een strandbal.
Het plan is als volgt. Ik neem een drie-dimensionale ruimte, in x, y, z-coordinaten, en teken daarin een bol.

Ik ken natuurlijk de Stelling van Pythagoras in de drie-dimensionale ruimte: die is gewoon de gebruikelijke vorm en zegt dat de afstand Δs tussen elke twee punten gegeven wordt door:

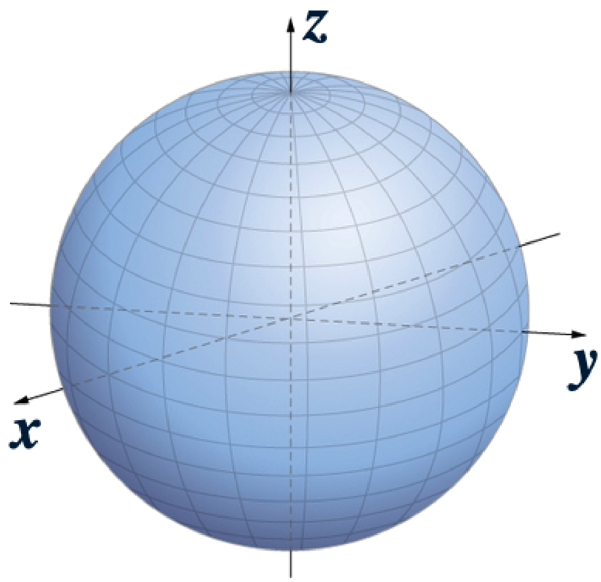
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (5.6)$$

Maar, ik wil graag weten wat de formule is voor de afstand tussen twee punten *op* de bol. Dan moet ik dus op de een of andere manier de formule voor de bol in mijn Stelling van Pythagoras verwerken. Gelukkig ken ik die. De coöordinaten (x, y, z) van een punt op de bol zitten aan elkaar vast via de formule:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (5.7)$$

waarin R de straal van de bol is. Even opletten: de formule van de bol knoopt de *locaties* van de punten op de bol aan elkaar, maar voor de Stelling van Pythagoras hebben we de *afstanden* tussen punten nodig[7]. Ik ga daarom van de bol-formule een afstandsformule maken.

[7] In Lesbrief 2 merkte ik al op dat het heel belangrijk is om t en x, tijdstippen en locaties, niet te verwarren met Δt, Δx, tijdsduren en afstanden. Zoals ik daar al zei: de Relativiteitstheorie gaat uitsluitend over tijdsduren en afstanden, *nooit* over tijdstippen en locaties.



Voor heel kleine afstandjes, 'Δ', gelden dezelfde regels als voor differentiëren. Bijvoorbeeld: $\Delta(x^2)$ wordt $2x\,\Delta x$, en $\Delta(\ln x)$ wordt $\frac{1}{x}\,\Delta x$, en $\Delta(\text{constante}) = 0$. Kleine afstandjes maken van de formule van de bol levert dan op

$$2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y + 2z\,\Delta z = 0. \tag{5.8}$$

Mooi zo, want hiermee kan het afstandje Δz in de Stelling van Pythagoras vervangen door afstandjes in de x- en y-richting. Invullen in 5.6 en uitwerken, en we vinden dat de Stelling van Pythagoras verandert in

$$\Delta s^2 = \left(\frac{1+x^2}{R^2-x^2-y^2}\right)\Delta x^2 + \left(\frac{1+y^2}{R^2-x^2-y^2}\right)\Delta x^2 + \left(\frac{2xy}{R^2-x^2-y^2}\right)\Delta x\Delta y. \tag{5.9}$$

En klaar! Deze Stelling is duidelijk niet meer dezelfde als waarmee we begonnen. De kwadraten van de afstandjes worden niet meer één op één bij elkaar opgeteld, maar via ingewikkelde breuken. Deze geven aan dat we niet meer in een vlakke ruimte leven, maar op een gekromde. Dat komt omdat we de bol-formule ingebouwd hebben. Zie je trouwens dat er nog maar twee afstandjes, Δx en Δy, in de formule voorkomen? Dat is omdat de ruimte *op* een bol twee-dimensionaal is, niet meer drie. Net als eerder kunnen we die getalletjes vóór de afstandjes samenvatten in een blokje getallen, de metrische tensor. Voor op de bol is deze

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1+x^2}{R^2-x^2-y^2} & \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} & \frac{1+x^2}{R^2-x^2-y^2} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Wie er getraind in is, kan uit de metrische tensor allerlei geometrische eigenschappen van de bol afleiden. Bijvoorbeeld wat de kortste weg is van de 'evenaar' naar 'New York', of hoeveel vierkante meter het boloppervlak is. Daar gaan we hier niks mee doen, dit was alleen bedoeld als voorbeeld dat we aan de metrische tensor kunnen zien dat we niet meer in een vlakke ruimte leven!

5.6 De Einstein Veldvergelijkingen

Tijd voor een samenvatting! In Lesbrief 1 zagen we dat als je uit een inertiaalstelsel stapt, massa's versnellen alsof er een kracht op werkt. Deze schijnkracht geeft alle massa's precies dezelfde versnelling. En dat doet zwaartekracht ook, vanwege het Equivalentieprincipe. Einstein realiseerde zich daardoor dat zwaartekracht hetzelfde voelt[8] als een schijnkracht. En omdat het pad dat massa's door zwaartekracht afleggen voor alle objecten hetzelfde is, kunnen we zwaartekracht zien als een gekromde ruimtetijd. En kromming, die kun je aflezen aan afwijkingen van de Stelling van Pythagoras, waarvan de grootheid de metrische tensor is. Ziedaar: de Algemene Relativiteitstheorie in een notedop!

[8] Een zeer scherpe lezer (of leerling!) kan nu een vraag stellen. Is *alle* zwaartekracht hetzelfde als schijnkracht? Kijk maar eens naar ik die op het aardoppervlak geduwd wordt. Zolang ik niet aan het vallen ben en gewoon met mijn beide voeten op de grond sta, is er geen relatieve versnelling tussen mij en aardbol, dus waar zou die schijnkracht dan vandaan moeten komen? Goede vraag! Er wordt in de Algemene Relativiteitstheorie onderscheid gemaakt tussen zwaartekracht ten gevolge van massa of energie, en zwaartekracht ten gevolge van beweging in een niet-inertiaalstelsel. Beide worden beschreven door kromming van ruimtetijd. De eerste soort heet *intrinsieke* kromming, en de tweede soort heet *extrinsieke* kromming. De Einstein veldvergelijkingen 5.11 voorspellen beide soorten.
Trouwens, eerder in deze Lesbrief zag je dit verschil al. Vanuit het niet-inertiaalstelsel van de maan werd de schijnkracht naar buiten gecompenseerd door de zwaartekracht naar binnen toe. In kromming uitgedrukt is de eerste de extrinsieke kromming, en de tweede de intrinsieke. En zo zie je mooi dat die twee krommingen elkaar zelfs kunnen opheffen.

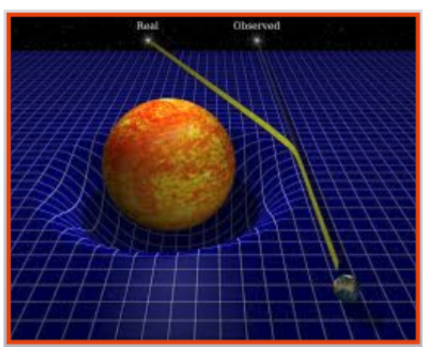
Blijft alleen de vraag over: hoe kom je aan de juiste uitdrukking voor die metrische tensor, $g_{\mu\nu}$? In ons voorbeeld zojuist berekende ik die, maar in werkelijkheid moet zwaartekrachtskromming het gevolg zijn van massa. Zonder massa geen zwaartekracht! Daarom ging Einstein op zoek naar de formule die de mate van ruimtetijdkromming, zwaartekracht dus, koppelde aan de massa en energie. Het kostte hem ruim tien jaar, na zijn Speciale Relativiteitstheorie van 1905, om dit allemaal in wiskunde uit te drukken. Maar, in de winter van 1915-1916 had hij zijn formule gereed. Het resultaat heet de *Einstein veldvergelijking*. Die ziet er als volgt uit:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{5.11}$$

Dat ziet er nog best eenvoudig uit (hij past op één regel, bijvoorbeeld). Maar dat komt vooral omdat de symbolen zodanig gekozen zijn dat de moeilijkste wiskunde weggestopt is. Als je die helemaal zou uitschrijven, zou één pagina niet genoeg zijn om de hele formule weer te geven! Dat gaan we dus niet doen.

In *woorden* is de Einstein veldvergelijking niet zo heel moeilijk, gelukkig. De rechterkant, $T_{\mu\nu}$, zegt hoeveel massa er is, hoe veel energie, en hoe hard die aan het bewegen is. Beweging is immers ook een vorm van energie, en daarom bevat de rechterkant zowel de impuls (hoe erg er in rechte lijnen bewogen wordt) en draai-impuls (hoe erg beweging afgebogen wordt). De linkerkant zegt hoeveel ruimtetijdkromming er is. Daar hadden we al een grootheid voor, de metrische tensor $g_{\mu\nu}$, en dat is precies waar de linkerkant uit bestaat. Je ziet die $g_{\mu\nu}$ al staan, maar ook in de symbolen R en $R_{\mu\nu}$ zit die metrische tensor opgesloten. De Einstein veldvergelijkingen zeggen dus dat als je weet hoeveel massa, energie, en beweging er is ($T_{\mu\nu}$), je kan uitrekenen hoeveel ruimtetijdkromming er van komt ($g_{\mu\nu}$).

Er staat een getalletje tussen de linkerkant en de rechterkant: $\frac{8\pi G}{c^4}$. Hier staat de superkleine gravitatieconstante G in, die bovendien gedeeld wordt door het gigantische getal van de lichtsnelheid tot de vierde macht. Het totaal is, in SI-eenheden, 10^{-45} (!!). De rechterkant van de Einstein veldvergelijkingen is daardoor vrijwel gelijk aan nul, en voorspelt dat kromming heel klein is. Na ja, óf je moet er heel erg veel massa, energie, of beweging tegenover zetten, door $T_{\mu\nu}$ heel groot te maken. Hier zie je nog eens hoe zwak zwaartekracht is. Dat is de reden waarom je de effecten van de Algemene Relativiteitstheorie in het dagelijks leven bijna niet meemaakt. Je ziet die pas goed in de buurt van sterren, sterrenstelsels, zwarte gaten, en andere superzware objecten.



Toch kon men in de tijd van Einstein wel al testen dat zijn formule correct was. Kijk, de kromming van de ruimtetijd heeft invloed op *alles* wat door die ruimtetijd probeert te bewegen, of het nu massa heeft of niet. Einstein voorspelde daarom dat ook licht afgebogen zou moeten worden door de ruimtetijdkromming. Sterrenlicht dat langs de zon probeert te scheren, buigt door de ruimtekromming van de massa van de zon af. Dit effect heet een *gravitatie-lens*. En laat dit nu precies zijn wat er gemeten werd, tijdens de zonsverduistering van 1919. Dit bevestigde Einsteins theorie, en maakte hem in één klap wereldberoemd. Sindsdien hebben alle metingen laten zien dat Einstein gelijk had.

6

Lesbrief 6: Zwarte gaten

6.1 Introductie

De basis van de Algemene Relativiteitstheorie is gelegd in de vorige Lesbrieven! Daarin zagen we dat de tijdruimte gekromd is wanneer er massa of energie in de buurt is, en dat de Einstein veldvergelijkingen de vorm van die kromming voor je uitrekent. Die kromming wordt netjes samengevat in de metrische tensor die ons de afwijking van de Stelling van Pythagoras vertelt, en daarmee hoe driehoeken meevormen met de ruimtetijd. En, omdat die kromming *alles* in de ruimtetijd beïvloedt, is het Equivalentie Principe mooi ingebouwd in onze theorie van zwaartekracht!

Daarmee hebben we de regels van zwaartekracht in de vingers, Hoog tijd om die toe te passen. Daarvoor gaan we in deze Lesbrief meteen een van de mooiste voorbeelden van gekromde ruimtetijd bestuderen: zwarte gaten! Dit is een heel groot onderwerp waar natuurkundigen hele bibliotheken over volgeschreven hebben en nog steeds doen, maar we zullen zien dat we, met alleen wat simpele wiskunde, al een aantal van de belangrijkste resultaten kunnen vinden. Waaronder het antwoord op de vraag: waarom is een zwart gat eigenlijk zwart?

6.2 Zwarte gaten uit Newton?

Het idee van zwarte gaten, sterren waarvan de zwaartekracht sterk genoeg is om licht naar zich toe te trekken, bestond al lang voor Einsteins Algemene Relativiteitstheorie. Het kan namelijk al uit Newton's zwaartekracht 'afgeleid' worden. Ik zet hier apostrophjes omdat er een en ander niet kan kloppen aan deze afleiding. Toch staat die nog wel eens in sommige boeken. Laten we er daarom even doorheen lopen.

We beginnen met de wet van behoud van energie op te schrijven zoals bij Newton geldt voor een massa m in de zwaartekracht door een massa M: de kinetische energie van een massa plus de hoogte-energie moet altijd hetzelfde getalletje opleveren[1]. Even opletten hier, want we gaan dadelijk de hoogte helemaal oneindig groot maken, en Newtons zwaartekrachtwet wijkt dan behoorlijk af van de versie vlakbij het oppervlak. In plaats van mg is[2] is die $-G\frac{mM}{r^2}$.
We lanceren nu een raket met snelheid v_{start} vanaf het oppervlak van de planeet met straal R. Deze raket heeft verder geen brandstof bij zich en stuwt zichzelf niet voort; hij moet het doen met de beginsnelheid die wij geven. De wet van behoud van energie zegt dan wat de snelheid v is wanneer de raket op hoogte r is aangekomen:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{start}}^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}. \tag{6.1}$$

We zien dat als de hoogte r groter wordt, de snelheid v omlaag gaat. Dit is niks anders dan zeggen dat zwaartekracht de raket afremt. Als de snelheid bij lancering niet groot genoeg was, zal die uiteindelijk nul worden. Dan heeft de raket zijn hoogste punt bereikt, en kukelt hij weer terug naar het oppervlak. Zwaartekracht wint!

Wat nu als we de raket genoeg beginsnelheid willen meegeven om wél aan de zwaartekracht te ontsnappen? Wel, dat laatste zegt dat we zó ver van het oppervlak opgestegen zijn dat de zwaartekracht niet meer trekt: we hebben de raket oneindig hoog gegooid! In dat geval is de potentiële energie er nul geworden. Als de raket nog een beetje energie over had, zit dat daar in kinetische energie. Als ook die nul geworden is, is de raket *ternauwernood* aan de zwaartekracht ontsnapt: die heeft genoeg getrokken om de raket naar stilstand af te remmen, maar niet genoeg om de raket weer terug te doen vallen. In energie-balans geeft ons dit:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{start}}^2 - G\frac{mM}{R} = 0. \tag{6.2}$$

Hieruit kunnen we de benodigde beginsnelheid oplossen, en we vinden dan de formule voor de zogenaamde *ontsnappingssnelheid*: $v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$.

[1] Ooit een afleiding van deze wet gezien? Die is niet zo moeilijk. Begin met een massa met hoogte-energie $mg\,h_{\text{start}}$. Trek daar een beetje hoogte Δh van af, zodat de nieuwe hoogte gegeven is door $h_2 = h_1 - \Delta h$:

$$mgh_1 = mgh_2 + mg\,\Delta h$$

Dit verschil in hoogte Δh is afgelegd tijdens een constante versnelling van g, zodat geldt $\Delta h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$, én dat $v = g\,\Delta t$. Dit alles ingevuld in de vorige vergelijking geeft de Wet van Behoud van Energie:

$$mg\,h_1 = mg\,h_2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

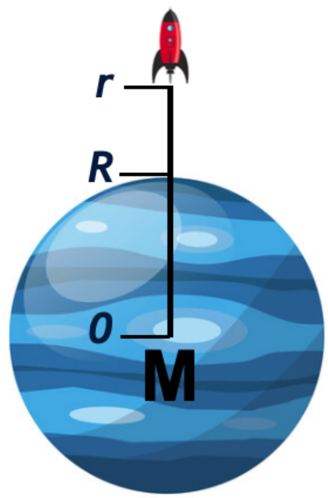
Het verschil in hoogte-energie wordt omgezet in kinetische energie!

[2] De relatie tussen een kracht F en zijn potentiële energie V is $F = -V'(x)$, waar een accentje een plaatsafgeleide is. In ons geval is F de Universele Zwaartekrachtswet die we in Lesbrief 5 hadden afgeleid. Het is dan makkelijk om te zien dat de bijbehorende potentiële energie gegeven wordt door $-G\frac{mM}{r}$.

Trouwens, met $F = -V'(x)$ kunnen we de Behoud van Energie bewijzen voor *alle* soorten potentiële energie. Neem een massa die een stukje dx bewogen heeft, van plek x_1 naar x_2. De potentiële energie verandert dan in $V(x_2) = V(x_1 + dx)$, en voor kleine afstandjes dx is dit $V(x_1) + V'(x_1)dx$. Vul in dat $V'(x) = -F = -ma$. Het resultaat is voor *kleine* afstandjes dx, en om er een willekeurig grote afstand van te maken moet je integreren.
Zo gezegd, zo gedaan: $\int V'(x)dx = -m\int a\,dx = -m\int v\,dv = -\frac{1}{2}mv^2$. Even opschonen, en je vindt

$$V(x_1) = V(x_2) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Potentiële energie is omgezet in kinetische energie!



Die hangt af van de straal van de planeet. Logisch ook: hoe verder weg van het middelpunt, hoe minder hard de zwaartekracht trekt, dus hoe minder hard de raket gelanceerd hoeft te worden. Zie je trouwens dat de massa m van de raket totaal niet uitmaakt? Dat is weer het Equivalentie Principe uit Lesbrief 5.
Ok, tot zover. Nu de omgekeerde vraag. Als we al weten (uit Lesbrief 4 bijvoorbeeld) dat een massa niet sneller kan reizen dan het licht, hoe dichtbij het midden van de planeet mag de massa m aan zijn reis beginnen opdat hij nog nét aan weet te ontsnappen? Dat is dan:

$$R = \frac{2MG}{r\,c^2}. \tag{6.3}$$

Interessante conclusie! Dit zegt dat als een massa m probeert weg te schieten van een massa M vanaf een afstand dichterbij dan R, de lichtsnelheid niet genoeg meer is om van de zwaartekracht te ontsnappen en de massa m onherroepelijk terug naar beneden wordt getrokken. En omdat we al gezien hadden in Lesbrieven 2 en 3 dat een massa niet sneller kán dan licht, kan *niks* nog vanaf R ontsnappen. Een zwart gat! Niet?

Niet! Deze afleiding kán niet kloppen.
We hebben deze afleiding gedaan met Newtons Zwaartekrachtwet en die geldt alleen voor dingen die massa hebben, en licht heeft dat niet. En zagen we niet in Lesbrieven 2 en 3 niet al zo dat massaloze deeltjes altijd met c móéten bewegen? Dus waarom hebben we hier een model waarbij licht afremt terwijl het probeert te ontsnappen van de masssa M? Tenslotte zijn er nog de formules voor kinetische en potentiële energie, waarvan we in Lesbrief 4 al hadden gezien dat die in de Relativiteitstheorie niet meer hetzelfde zijn als die we hier gebruikten.

Al met al een heel pakket redenen waarom bovenstaande afleiding van zwarte gaten niet correct kan zijn. We gaan daarom op zoek naar de échte reden waarom zwarte gaten bestaan (en waarom ze geen licht uitzenden). Ik zal daarbij gebruik moeten maken van Einsteins Algemene Relativiteitstheorie, uit Lesbrief 5. En zoals altijd, begint die met de metrische tensor.

6.3 De Schwarzschild ruimtetijd

Einsteins veldvergelijkingen zagen we al in Lesbrief 5. Einsteins veldvergelijkingen zijn erg ingewikkeld, en hijzelf dacht dat ze alleen bij benadering opgelost zouden worden (net zoals π^2 *ongeveer* 10 is, maar niet precies). Maar! al drie maanden nadat hij ze publiceerde in 1916, werd de eerste precieze oplossing gevonden! Dat was door Karl Schwarzschild, die de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ vond wanneer de ruimtetijd gekromd wordt door een bolvormige massa. En laat die eerste[3] exacte oplossing nu precies die van een zwart gat zijn! Het bijbehorende lijn-element is

$$\Delta s^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c\,r}\right) \Delta t^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c\,r}\right)} \Delta r^2 + r^2\, \Delta\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \Delta\varphi^2. \tag{6.4}$$

Hierin is dt de hoeveelheid tijd die verstrijkt op een klok ver weg van het zwarte gat, en r is de afstand tot het midden van het zwarte gat. De hoeken θ en φ zeggen onder welke hoek we naar het zwarte gat kijken. Nu heeft een zwart gat een perfecte bolvorm, dus de waarde van deze hoeken maakt niet zoveel uit omdat vanuit elke hoek gezien het zwarte gat er toch hetzelfde uitziet[4]. We zullen de hoek θ daarom straks kiezen als $\pi/2$, dat maakt onze berekeningen dan wat makkelijker.

Ingewikkelde uitdrukking, dat lijn-element van Schwarzschild, maar we kunnen er stapje voor stapje chocola van maken. Laten we eens beginnen met zien wat er gebeurt als we twee punten op die ruimtetijd bekijken die op een *radiele* lijn uit het zwarte gat steken. Die punten hebben onderling geen verschil in hoek, dus is het verschil van hun hoekcoordinaten gelijk aan nul, $\Delta\theta = 0, \Delta\varphi = 0$. Ook bekijken we de twee punten op hetzelfde tijdstip, $\Delta t = 0$. Het lijn-element schoont dan behoorlijk op:

$$\Delta s = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c\,r}\right)}}\, \Delta r. \tag{6.5}$$

Hier staat het aantal meters Δs dat je meet wanneer je je op afstand r van het zwarte gat bevindt. Je kan meteen zien dat als je ver weg

[3] Misschien geeft dit je het idee dat het vinden van oplossingen van de Einstein veldvergelijkingen misschien toch niet zo héél moeilijk is als Einstein aanvankelijk dacht. Jawel hoor! De vólgende oplossing werd bijna vijftig(!) jaar later pas gevonden. Dat was door Roy Kerr, en zijn *Kerr metriek* beschrijft een ronddraaiend zwart gat.

[4] Je kan je dan afvragen hoe het komt dat de hoeken θ en φ in het lijn-element voorkomt. Iets wat er van elke kant hetzelfde uitziet zou toch niet afhankelijk mogen zijn van de hoek waarop je ernaar kijkt? Tja, die hoeken in het lijn-element zijn gewoon het gevolg van het feit dat een punt in de ruimte, of die nou bolvormig is of niet, coordinaten nodig heeft om aangewezen te kunnen worden. Kijk maar naar een vlak stuk papier in (x, y)-coordinaten: ook dat ziet er ook op elke plek hetzelfde uit, maar een stip op dat papier heeft nog altijd coordinaten (x, y) nodig.

bent, r groot dus, het aantal meters ds kleiner wordt; dichterbij het zwarte gat worden het aantal meters juist groter. Gek! Dat zegt dat je uitgerekt wordt naarmate je naderbij het zwarte gat komt! Dit effect heet *spaghettificeren* (ja, dit is echt de officiële naam).
En wat als je nu op een en dezelfde afstand blijft, $dr = 0$ dus, maar je om het zwarte gat heencirkelt? Voor het gemak doen we dat op een hoek $\theta = \pi/2$. Dan is $\sin\theta = 1$ en $d\theta$ is nul, maar $d\varphi$ niet. We bekijken de twee punten weer op hetzelfde tijdstip, en het lijnelement zegt dan:

$$\Delta s = r\,\Delta\varphi. \tag{6.6}$$

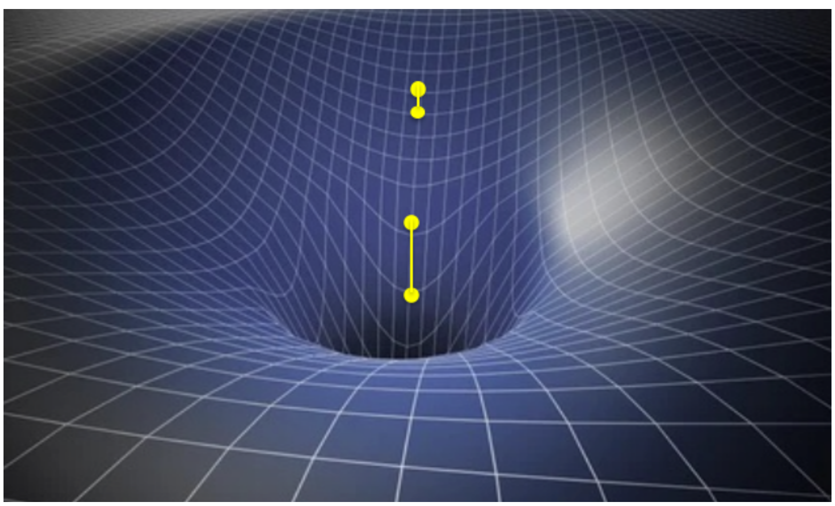
Dit is gewoon de formule voor de afstand langs een stukje cirkel[5]. Wanneer je op vaste afstand blijft van een zwart gat, is de ruimtetijd dus gewoon die van een plat stukje papier.

[5] Kijk maar: loop maar eens een compleet rondje rond het zwarte gat, van $\varphi = 0$ tot $\varphi = 2\pi$. Het lijn-element zegt dan dat de totale afgelopen afstand $s = \int \Delta s$ gegeven wordt door

$$s = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,\Delta\varphi = 2\pi r.$$

Dat is precies de afstand die je op een vlak papier zou afleggen als je exact één keer rond een cirkel loopt.

Je kan bovenstaande twee formules tekenen in een grafiek. De kromming zien we in verticale richting, en de afstanden s tot het zwarte gat zijn de witte lijnen die naar het midden wijzen.



In de grafiek heb ik twee gele lijntjes getekend. Dit zijn de afstanden ds tussen twee opeenvolgende kruispuntjes van het witte assenstelsel. Je kan dan mooi het spaghettificeren zien, omdat het gele lijntje dichtbij het zwarte gat beduidend langer is dan het gele lijntje verder weg.
Hoe *veel* kan zo'n geel lijntje opgerekt worden? Wel, dat zien we terug in formule 6.5. Het stukje $\sqrt{1/\left(1-\frac{2GM}{c\,r^2}\right)}$ wordt groter naarmate r kleiner wordt, maar omdat het een breuk is kan het zelfs oneindig groot worden als de noemer gelijk wordt aan nul. Je ziet dan meteen dat dat gebeurt op een afstand $r = \frac{2GM}{c^2}$. Er bestaat dus een afstand R vanaf het zwarte gat waarop je *oneindig* uitgerekt wordt! Deze afstand heet

de *horizon* van het zwarte gat.
Zeg, is dat niet dezelfde formule die we eerder ook al vonden toen we die Newtoniaanse afleiding deden? Jazeker! Alleen deze keer is de formule netjes volgens de Algemene Relativiteitstheorie afgeleid!

6.4 Gravitationele tijdrek

Ok, tot zover hebben we gezien wat de *ruimte* doet bij het zwarte gat. Hoe zit het met de *tijd*? We pakken weer het lijn-element erbij, en deze keer vergelijken we twee punten in de ruimtetijd die precies op dezelfde plek liggen. Makkelijker gezegd: we zetten een klok neer op een vaste plek. Dat maakt $dr = 0, d\theta = 0, d\varphi = 0$, en het lijn-element[6] zegt dan dat de hoeveelheid gemeten tijd door die klok gegeven wordt door

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right)}\,\Delta t. \tag{6.7}$$

We zien daar meteen uit dat de klok weinig seconden meet wanneer het dichtbij het zwarte gat is, r klein dus, maar veel seconden wanneer het ver weg staat. De klok loopt dus langzamer wanneer het dichtbij het zwarte gat is dan ver weg. De zwaartekracht van het zwarte gat vertraagt de tijd! Dit effect heet *gravitationele tijddilatatie*. Het is een beetje hetzelfde als de tijdrek die we al gezien hadden bij de Speciale Relativiteitstheorie, alleen is de schuldige niet de snelheid waarmee je door de ruimtetijd beweegt, maar op welke plek in die ruimtetijd je staat. Hoe dichterbij massa, hoe meer gravitationele tijdrek, hoe langzamer tijd verloopt.

Dit effect leidt tot allemaal spannende mogelijkheden. In de mooie film *Interstellar*[7] is het zelfs een van de spannende verhaallijnen; daar moeten een paar astronauten een tijdje op een planeet doorbrengen die dichtbij een zwart gat draait. Hun eigen tijd τ gaat daarom maar langzaam verder, terwijl de tijd t in de rest van het universum veel sneller voortraast. Zij moeten dus snel hun werk daar doen en wegwezen, voor er terug op aarde inmiddels honderden jaren voorbij zijn gegaan!

Een vraag. Tijd remt af naarmate je dichterbij het zwarte gat komt. Bestaat er ook een plek bij het zwarte gat waar de tijd helemaal tot stilstand komt, $d\tau = 0$? Jazeker! Dat is wanneer $\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right)}$ nul wordt, en we zien meteen dat die plek op $r = \frac{2GM}{c^2}$ is. De horizon dus!

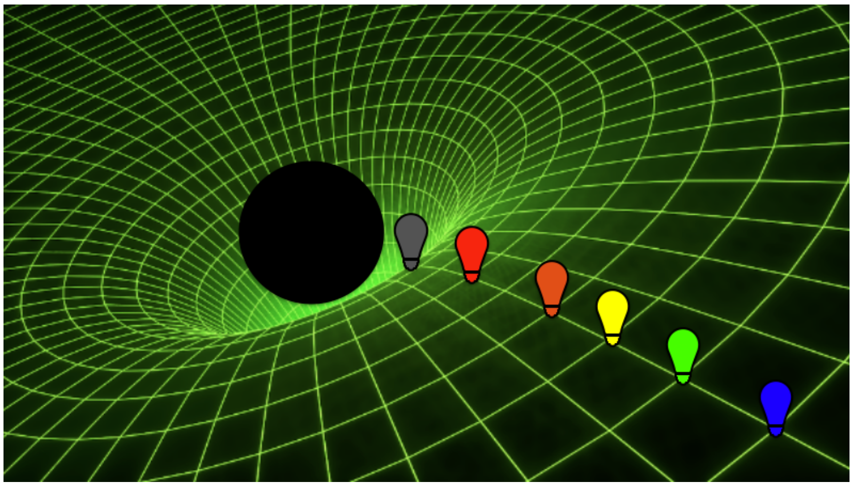
De horizon van een zwart gat heeft daarom twee betekenissen. Het is

[6] Bedenk hier weer even wat we in Lesbrief 5 al gezien hadden, dat als we tijd willen meten, we ds^2 vervangen door $-c^2\,d\tau^2$.

[7] *Interstellar*, door Christopher Nolan, 2014, Paramount Pictures en Warner Brother Pictures.

De film werd mee-geschreven door professor Kip Thorne, een van de grootste experts van de Algemene Relativiteitstheorie en winnaar van de Nobelprijs van 2017. Professor Thorne wilde er zeker van zijn dat de natuurkunde in de film helemaal klopt (al mag je het laatste deel van de film met een korrel zou nemen).

ten eerste de plek waar ruimte het meest uitrekt, en ten tweede de plek waar de tijd geheel tot stilstand komt. Dit is alles wat we nodig hebben om te begrijpen waarom zwarte gaten zwart zijn. Het is niet omdat licht er niet uit kan komen. Het is omdat licht er *roodverschoven* wordt.



Zet een lamp neer op grote afstand van het zwarte gat. Het licht, laten we dat blauw maken, straalt vrolijk alle richtingen op, en komt even later bij het oog of de telescoop van de ontvanger aan die van (nog) grotere afstand van het zwarte gaat staat, precies zoals het uitgezonden was. Zet nu dezelfde lamp een stuk dichterbij het zwarte gat. Nu zal de lichtstraal al een beetje last beginnen te krijgen van de opgerekte ruimte aldaar. Met de oprekking mee wordt de golflengte van het licht langer, en het zal dan ook roder bij de ontvanger aankomen dan het uitgezonden werd. Weer plaatsen we de lamp een stukje dichterbij het zwarte gat, inmiddels redelijk in de buurt bij de horizon. De lichtstraal heeft nu verschrikkelijk last van de oprekking van de ruimte, en de golflengte is tot diep infrarood opgerekt. En als we de lamp *op* de horizon $R = \frac{2GM}{r c^2}$ plaatsen? Dan is de oprekking oneindig groot geworden. De kleur van licht is helemaal opgeschoven tot het diepste infrarood dat je je kan bedenken. Dat maakt de meting niet alleen lastig, maar zelfs onmogelijk. Oneindig rood is zwart.

Een iets andere manier om hetzelfde te zeggen is dat de frequentie van dit licht oneindig klein is geworden. Maar de energie van het licht is, volgens Plancks beroemde formule $E = h f$, dan nul geworden. Licht dat vanaf de horizon naar buiten probeert te reizen, raakt al zijn energie kwijt. Daar zie je dus niks van!
Dezelfde conclusie volgt trouwens net zo makkelijk van de gravitationele tijdrek. Hoe dichter de lamp bij het zwarte gat is, hoe meer het

licht last heeft van die tijdrek, en hoe meer seconden het elektromagnetisch veld nodig heeft om op en neer te wiebelen. De frequentie gaat daardoor omlaag, en het licht wordt rood. En opnieuw geldt, op de horizon, staat de tijd stil en is de frequentie nul geworden. Alle licht is verdwenen!

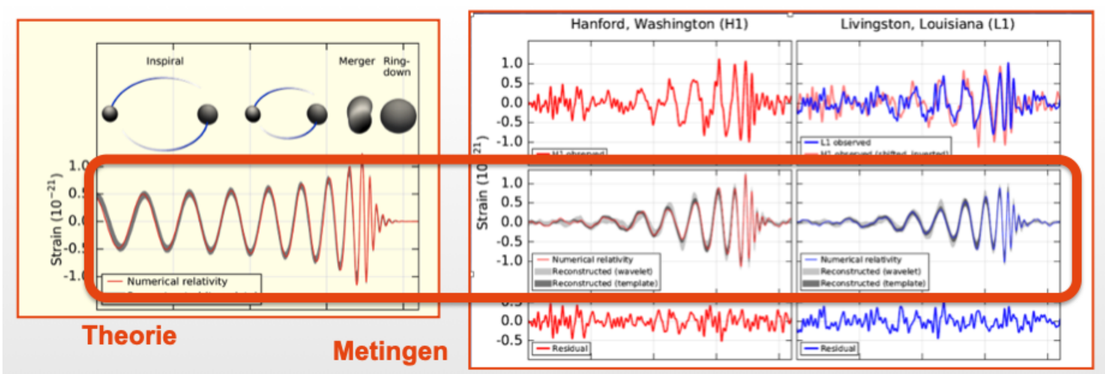
6.5 Zwarte gaten meten

Zwarte gaten zijn zwart. Dan is het lastig ze te meten, met lichttelescopen, of met welk ander type signaal dan ook. Maar, we zagen al dat er alleen niks uit kan komen als zo'n signaal vanaf de horizon uitgezonden wordt, Alles wat buiten de horizon uitgezonden wordt, kan wel degelijk van zwart gat naar ons reizen. De truc om zwarte gaten te bestuderen is dus om heel goed te weten wat er *vlakbij* een zwart gat gebeurt. En daar zijn verschillende manieren voor.

Eén is door naar normale sterren te kijken die rond de zwarte gaten draaien. Die zenden wél licht uit, en dat licht kan ons prima bereiken. Wel is het zo dat dat licht ernstig roodverschoven is, maar dat is verder niet een groot probleem. Gewoon een telescoop bouwen die gevoelig is voor elektromagnetische golven in het (diep) infrarood, en de meting is prima te doen. Die metingen zijn gedaan, en inderdaad zagen de onderzoekers dat sterren aan het ronddraaien waren rond een stukje heelal waar verder niks te zien was. Aan de beweging van die sterren (én aan hun roodverschoven licht) konden de onderzoekers terugrekenen dat daar een zwart gat is, welke massa die heeft, enzovoort. Dit werk leverde professor Andrea Gehz en professor Reinhard Genzel een Nobelprijs op in 2020.

Een tweede manier is om de beweging van licht zélf te meten wanneer dat bij een zwart gat in de buurt is, maar er nog niet ingevallen is. Rond een elk zwart gat is er een speciale cirkelbaan waar licht als een planeet rond het gat draait. Niet zó dichtbij dat het licht naar binnen wordt gezogen, maar wel dichtbij genoeg om niet uit die cirkelbaan te kunnen ontsnappen. Dit heet de *fotonsfeer* van het zwarte gat. En ook metingen aan dit licht zijn gedaan, en leverden in 2019 de eerste prachtige foto's op van (het licht rondom) de zwarte gaten in het centrum van het sterrenstelsel Messier 87 en ons eigen Melkwegstelsel.

En dan zijn er nog de zwaartekrachtsgolven. Eén enkel zwart gat maakt een tijdruimtekromming, maar die verandert verder niet in de tijd. Maar als je twee zwarte gaten bij elkaar in de buurt brengt, trekken zij elkaar aan (ze vallen in elkaars deuk) blijft de tijdruimte niet meer constant maar begint die te dansen. Er komen rimpelingen uit, die zich met de lichtsnelheid door het universum bewegen. Die rimpelingen, de *zwaartekrachtsgolven*, nemen energie weg van de twee zwarte gaten en dit gaat ten koste van hun beweging: ze verliezen de energie om de zwaartekracht te overwinnen en komen daardoor steeds dichter bij elkaar; dit deel wordt de *inspiral* genoemd. Tot het punt waarop hun ruimtetijdkrommingen zich vermengen en er slechts één grote kromming overblijft, de zogenaamde *merger*. Dit overgebleven stuk ruimtetijd kent dan enkele laatste naschokken, totdat het tot rust komt en de dans stopt. Dit deel wordt de *ringdown* genoemd.



En ook dit werd gemeten! De twee LIGO-zwaartekrachtgolfdetectoren in de staten Washington en Louisiana waren de eerste ter wereld die gevoelig genoeg waren om het dansen van de ruimtetijd te voelen als gevolg van twee zwarte gaten die in elkaar draaien. Hun meting is hierboven gegeven, waaruit duidelijk blijkt dat de formule van Einstein wederom de juiste voorspelling gaf! Dit was de beroemde eerste detectie van zwaartekrachtgolven, uitgevoerd op 14 september 2015 en openbaar gemaakt in 2016. Dit leidde tot de Nobelprijs in 2017[8]. Sindsdien heeft zich over de hele wereld een netwerk van zwaartekrachtgolfdetectoren gevormd, waaronder de Europese *Virgo detector* in Italië en de *Kagra detector* in Japan. Samen hebben die sindsdien bijna tientallen zwaartekrachtsgolven gemeten, wat heeft geleid tot een schat aan informatie over allerlei fundamentele natuurkunde, astronomie en kosmologie.

[8] Eén van de winnaars was Kip Thorne, die ik een paar bladzijden geleden al noemde.

Ik kan hier niet alles in detail uitleggen (daar kan een heel eigen serie lesbrieven over geschreven worden!), maar wel enkele resultaten noemen. Zo kunnen we met behulp van zwaartekrachtsgolven zwarte gaten bestuderen door het signaal van inspiral, merger, en ringdown te zien, de details van deeltjesfysica in neutronensterren meten, de uitdijingssnelheid van het heelal meten, en ook de Algemene Relativiteitstheorie zélf kan uiterst precies worden getest. Het allerbelangrijkste is dat zwaartekrachtsgolven kunnen worden geproduceerd door *alles* wat massa heeft, dus er is letterlijk niets in het universum dat in principe niet kan worden gedetecteerd door zwaartekrachtsgolven. Het feit dat zwaartekracht zo zwak is, betekent bovendien dat een zwaartekrachtgolf nauwelijks wordt verstoord door wat die ook tegenkomt op zijn weg van de bron naar onze detectoren, wat een zeer zuiver signaal oplevert. Vergelijk dit met licht, dat tijdens het reizen gemakkelijk verstoord wordt, en dat door een groot deel van het universum zelfs helemaal niet wordt uitgezonden. Donkere Energie en Donkere Materie, bijvoorbeeld, zenden geen licht uit, zodat ze volledig onzichtbaar zijn voor onze lichttelescopen. Zwaartekrachtgolven bieden de mogelijkheid om voor eens en voor altijd uit te zoeken wat Donkere Energie en Donkere Materie zijn!

We bevinden ons dus op een heel bijzonder moment in de geschiedenis van de wetenschap. Nu we zwaartekrachtsgolven hebben, zullen we de grootste mysteries van het universum onderzoeken en dingen zien die niemand ooit eerder heeft gezien. Met de komende generatie detectoren die tussen 2030 en 2040 aangezet zullen worden, zoals de Europese *Einstein Telescoop*[9], de Amerikaanse *Cosmic Explorer*, en de zwaartekrachtsgolfdetector *LISA* die in een baan rond de zon zal worden gelanceerd, wordt een schatkamer geopend. Er komen zeer, zeer spannende tijden aan!

[9] Voor meer uitleg over de Einstein Telescoop, kun je drie filmpjes bekijken die het Discovery Museum gemaakt heeft. In Aflevering 1 gaat het over Einsteins Relativiteitstheorie, in Aflevering 2 over zwaartekrachtsgolven, en in Aflevering 3 gaat het over hoe je die kan meten en hoe Einstein Telescoop zijn hoge nauwkeurigheid zal halen. Zie:

www.discoverymuseum.nl/activiteiten/de-wonderlijke-wereld-van-zwaartekrachtgolven/